

分类号 _____

密级 _____

UDC _____

编号 _____

中国人民大学 博士学位论文

图和超图的谱及基于谱半径的超图分类研究

满守东

指导教师 _____ 林勇 教授

_____ 中国人民大学数学系

申请学位级别 _____ 博士 _____ 学科专业名称 _____ 应用数学

论文提交日期 2015 年 3 月 论文答辩日期 2015 年 5 月

培养单位 _____ 中国人民大学信息学院

学位授予单位 _____ 中国人民大学

答辩委员会主席 _____

Typeset by L^AT_EX 2_ε at October 27, 2015

With package C^ASthesis v0.2 of C^TE_X.ORG

Spectral of graphs and hypergraphs and the classifications of hypergraphs based on the spectral radius

Shoudong Man

Supervisor:

Prof. Yong Lin

School of Information
Renmin University of China

October, 2015

*Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of Ph.D.
in Applied Mathematics*

摘 要

本文共包括四章内容。第一章为绪论，介绍了本文的研究背景，研究现状及创新之处；第二章分别介绍了一般图和超图的概念与记号，以及一些重要的定义和引理，其中大部分引理为本文新创。第三章我们得到一些图上的改进的Harnack 不等式和对数Harnack 不等式，并用这些不等式得到特征值估计，及借助特征值估计得到对数Sobolev常数估计。第四章我们根据超图的谱半径对超图进行了分类。全文围绕图和超图的特征值展开，都是对特征值的研究和应用，内在一体。

第一章主要介绍了本文的研究背景，研究现状及创新之处。Harnack 不等式和对数Harnack 不等式在黎曼几何中具有重要的作用，但最近几年，这些不等式被推广到了离散空间上，主要是图上。Chung, S. T. Yau 和我的博士生导师林勇教授等人先后在图上建立和改进了Harnack 不等式和对数Harnack 不等式，并得到了图上的特征值和对数Sobolev常数的估计。把连续空间上的理论推广到离散空间上，具有非常广阔的应用前景。本文部分地改进了Chung, S. T. Yau 和林勇教授等人的结果。另外，根据谱半径，Smith等人对一般图进行了完全分类，或刻划了一般图应具有的结构。但用Smith等人的方法，难以对超图进行分类，我们建立了新的方法，如 α -正规的概念及应用，并结合计算机程序实现了对超图的分类。

第二章在第一部分主要介绍了一般图的相关概念与记号，另外给出曲率-维数不等式 $CD(\tilde{m}, \xi)$ 和指数曲率-维数不等式 $CDE(n, K)$ 的定义，这两个不等式是我们后面得出改进的Harnack 不等式和对数Harnack 不等式的重要工具。在第二部分，我们介绍了超图的相关概念与记号，给出了超图的谱半径的定义，并建立了一些重要的定义和引理，这些定义和引理为我们对超图进行分类提供了基本的方法，并且在第四章的每个小节中都有用到，是我们对超图进行分类的基本理论依据。

第三章，首先假设齐性图的突子图满足曲率-维数不等式 $CD(\tilde{m}, \xi)$ ，我们对某些齐性图得到关于Dirichlet 特征值的Harnack型不等式，并用此Harnack型不等式得到特征值估计的下界。在第二节，我们为一般的齐性图 G 得到一个新的Ricci曲率算子 $\Gamma_2(f, f)(x)$ ，并在假设图 G 满足曲率-维数不等式 $CD(\tilde{m}, \xi)$ 的情

况下，得到一般的齐性图上的对数Harnack 不等式，并借助于本节的特征值下界估计，得到log-Sobolev 常数估计。在第三节，借助于第二节的方法，我们建立了具有正的Ricci曲率的一般图上的对数Harnack 不等式，并结合特征值的下界估计得到对数Sobolev 常数估计。在第四节，假设图 G 满足指数曲率-维数不等式 $CDE(n, K)$ ，且 $u = u(x, t)$ 是 G 上热方程 $(\mathcal{L} - q)u = 0$ 的一个正解时，我们得到了改进的图上的Li-Yau 不等式和图上最小特征值的上界估计值。由Chung, S. T. Yau 和林勇教授以前的研究成果，我们可知本章所有假设都是合理的。

第四章，超图，作为图的推广，有广泛的应用背景，但是技术上有本质的困难。在本章，我们计算得出超图谱半径的3个极限点，并利用我们发现的新方法，借助计算机程序，实现了对超图分类的研究，填补了对超图分类的空白。

关键词: Harnack 不等式，对数Harnack 不等式，特征值估计，对数Sobolev常数估计，超图， α -正规，谱半径

Abstract

This paper consists of four chapters. The first chapter is the introduction, which introduces the research background and research innovation. The second chapter introduces the concepts and marks for general graphs and hypergraphs, and some important definitions and lemmas. In the third chapter, we obtain some improved Harnack inequalities and logarithmic Harnack inequalities, and by using these inequalities we get eigenvalue estimates and logarithmic Sobolev constant estimates. In the fourth chapter, we classify all the connected r -uniform hypergraphs according to the spectral radius. Throughout this paper, we mainly focus on the eigenvalues of graphs and hypergraphs.

The first chapter introduces the research background of this paper and the research innovation. The Harnack inequality and logarithmic Harnack inequality play a very important role in the Riemann geometry. But in recent years, these inequalities are generalized to discrete space, mainly on the graphs. Chung, S. T. Yau and my doctoral supervisor Professor Yong Lin have established and improved the Harnack inequalities and logarithmic Harnack inequalities on graphs, and by using these inequalities they get eigenvalue estimates and logarithmic Sobolev constant estimates. By extending the continuous space theory to discrete space, we will have a very broad prospects for applications in the real world. In this chapter, we partially improved the results of Chung, S. T. Yau and Professor Lin Yong. In addition, according to the spectral radius, Smith and other scholars have completed the classifications for general graphs. But using their methods, it is difficult to classify the hypergraphs, so we established a new method, such as the concept of α -normal and the application of the concept, and by using the computer programs, we obtain the classification of hypergraphs.

In the second chapter, in the first part, we mainly introduce the related concepts and notes of general graphs, and define the curvature-dimension inequality $CD(\tilde{m}, \xi)$ and the exponential curvature - dimension inequality $CDE(n, K)$. The two inequalities are important tools for us to improve the Harnack inequality and

the logarithmic Harnack inequality. In the second part, we introduce the related concepts and notes of hypergraphs, give the definition of the spectral radius of hypergraphs, and establish some important definitions and lemmas which provide basic methods for us to classify the hypergraphs and are useful in each section of the fourth chapter.

In the third chapter, suppose that the convex subgraph of a homogeneous graph satisfies the curvature-dimension inequality $CD(\tilde{m}, \xi)$, we get improved Harnack inequalities for the Dirichlet eigenvalues of certain homogeneous graphs, and by the Harnack inequalities we get the lower bound for the eigenvalue. In the second section, we obtain a new Ricci curvature operator $\text{Gamma}_2(F, f)(x)$ for general homogeneous graph G , and assume that graph G satisfies the curvature - dimension inequalities of $CD(\tilde{m}, \xi)$, we get a logarithmic Harnack inequality for general homogeneous graph. By this logarithmic Harnack inequality and the eigenvalue estimate, we get lower bounds for the log-Sobolev constant. In the third section, we establish logarithmic Harnack inequality for general graphs with positive Ricci curvature, and get lower bounds for the logarithmic Sobolev constant. In the fourth section, suppose graph G satisfies the exponential curvature - dimension inequalities $CDE(n, K)$, and $u = u(x, t)$ is a positive solution of the heat equation $(\text{mathcal{L}} - q)u = 0$ on G , we obtain an improved Li-Yau inequality and an upper bound of the minimum non-zero eigenvalue of the graph. By the previous results of Chung, S. T. Yau and Professor Lin Yong, we know that in this chapter all assumptions are reasonable.

In the last chapter, hypergraphs, as the promotion of graphs, have extensive application background, but also have the essential technical difficulties. In this chapter, by calculating, we get three limit points of the spectral radius of hypergraphs, and by the new method we find and the computer program, we generalized the classifications of hypergraphs with different spectral radius, filling the blank of the classifications for hypergraphs.

Keywords: Harnack inequality; logarithmic Harnack inequality; eigenvalue estimate; logarithmic Sobolev constant estimate; hypergraph; α -normal; spectral radius.

目 录

摘要	i
Abstract	iii
目录	v
第一章 绪论	1
1.1 课题的来源及意义	1
1.2 文献综述	2
1.2.1 图上的谱问题	2
1.2.2 超图的谱问题	3
1.3 本文的研究方法及完成的知识创新	4
第二章 预备知识	7
2.1 有关一般图的相关概念与记号	7
2.2 有关超图的相关概念、记号和一些重要引理	8
第三章 Harnack 不等式和对数Harnack 不等式以及它们的应用	15
3.1 齐性图上关于Dirichlet 特征值的Harnack型不等式和特征值估计 ..	15
3.1.1 一些概念和主要定理	15
3.1.2 定理3.1.1的证明	17
3.1.3 定理3.1.3的证明	19
3.2 齐性图上的对数Harnack 不等式和借助于特征值下界估计的log- Sobolev 常数估计	20
3.2.1 重要引理	21
3.2.2 定理3.2.2的证明	25

3.3	具有正的Ricci曲率的一般图上的对数Harnack 不等式和借助于特征值下界估计的对数Sobolev 常数估计	28
3.3.1	引理和主要定理	28
3.3.2	定理的证明	29
3.4	图上的Li-Yau不等式及特征值估计	33
3.4.1	引言	33
3.4.2	引理	35
3.4.3	图上的Li-Yau 不等式	37
3.4.4	Harnack 不等式与特征值估计	46
第四章	基于谱半径的超图分类研究	49
4.1	对谱半径至多为2的超图的完全分类研究	49
4.1.1	引理	49
4.1.2	3-一致超图	51
4.1.3	r -一致超图	60
4.2	对谱半径位于两个极限点之间的超图的完全分类研究	64
4.2.1	引言和一些引理	64
4.2.2	3-一致超图	67
4.2.3	r -一致超图	81
4.3	对谱半径至多为 $(r-1)!\sqrt[r]{2+\sqrt{5}}$ 的一致超图结构的研究	85
4.3.1	研究现状及主要定理	85
4.3.2	引理	87
4.3.3	定理4.3.1的证明	91
4.3.4	定理4.3.2的证明	95
4.3.5	定理4.3.3的证明	99
4.3.6	构造谱半径 $\rho(H) \leq (r-1)!\sqrt[r]{2+\sqrt{5}}$ 的开基普和闭基普	100
参考文献		105
致谢		111

第一章 绪论

1.1 课题的来源及意义

图与超图谱理论不但是图论、矩阵理论、线性与多重线性代数等数学交叉研究课题, 而且在计算机科学、图像处理、优化理论、大规模计算、物理和化学等领域有广泛的应用, 因而一直是国内外受到广泛关注和非常活跃的多个学科交叉领域。图谱理论的研究主要是利用成熟的代数理论和技巧, 并结合图论和组合数学的理论来研究图谱、图的结构性质以及与图的其它不变量如直径、围长、连通度等之间的关系, 它将图与网络的代数性质与其拓扑性质紧密地结合在一起。图和超图的谱理论主要涉及图的邻接矩阵的谱和图的Laplacian 矩阵的谱, 是图论(特别是代数图论)和组合矩阵论共同关注的一个重要课题。图的邻接谱的研究最早源于量子化学研究领域, 最早明确提出研究图的邻接谱的是H. Sachs和A. J. Hoffman(1969年)。图的Laplacian谱是图谱理论中的另一研究领域, 综述文章R. Merris, B Mohar, 以及专著Fall R. K. Chung 详尽叙述了Laplacian 谱研究中的若干专题以及应用。

通过矩阵(邻接矩阵或Laplacian矩阵)表示, 建立图的拓扑结构(特别是图的各种不变量)和图的矩阵表示的置换相似不变量之间的联系, 图谱理论的一个主要问题就是研究图的性质能否以及如何由这些矩阵的代数性质反映出来, 这里所说的矩阵的代数性质, 主要是指矩阵的特征值所刻画性质。在上面所提到的矩阵中, 最重要的两个就是图的邻接矩阵和图的拉普拉斯矩阵。图的邻接矩阵的特征值和图的拉普拉斯矩阵的特征值都是在图的同构下的不变量。

对图的邻接矩阵的特征值而言, 最重要的两个特征值是最大特征值和最小特征值, 分别称为图的谱半径和最小根。在图的拉普拉斯特征值中, 最重要的也有两个, 图的最大拉普拉斯特征值(即拉普拉斯谱半径)和图的次小拉普拉斯特征值(即代数连通度)。本论文主要围绕图和超图的最小特征值和谱半径进行研究: 首先借助于图 G 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, 得到图的Laplacian矩阵最小特征值的一些上下界估计, 另一方面, 依据超图的谱半径的范围, 我们发现了一些新方法, 对超图进行了分类。

1.2 文献综述

1.2.1 图上的谱问题

在图的谱理论中, 研究特征值和特征函数性质是一个十分重要的内容, 特征值的估计能控制图上离散的马氏过程的扩散速度. 假设 G 代表一个图, V 是 G 的顶点集, E 是 G 的边集. d_v 表示与 G 的顶点 v 相接的边的个数, 我们假设 G 是一个局部有限图, 即 $d_v < +\infty$. 设 x 和 y 是图 G 的顶点, 如果 x 和 y 相邻, 即 x 和 y 之间有边相接, 则 (x, y) 或 $x \sim y$ 表示连接 x 和 y 的边. 图 G 的 Laplace 算子 L 定义为

$$Lf(x) = \frac{1}{d_x} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)], \quad \forall f \in V^R,$$

其中 $V^R = \{f | f : V \rightarrow R\}$.

在1994年, Chung 和 S. T. Yau 在[8]中证明了下列Harnack 型不等式: 假设 G 是一个关于 K 的不变的齐性图, K 是 G 的边生成集, K 的元素的个数为 k , $f(x)$ 是 G 的以 λ 为特征值的特征函数, 则对任意的 $\alpha > 2$ 和 $x \in V$, 有

$$\frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2 + \alpha \lambda f^2(x) \leq \frac{\lambda \alpha^2}{\alpha - 2} \sup_{y \in K} f^2(y).$$

由此, 他们得到Neumann 特征值和Dirichlet 特征值的下界估计.

在1996年, Chung 和 S. T. Yau 在[5]中建立了logarithmic Harnack 型不等式, 并利用上述Harnack 型不等式所得到的特征值的下界估计, 得到log-Sobolev常数的一个下界估计.

在2010年, Y. Lin 和 S. T. Yau 引入了下列曲率-维数不等式. 根据Bakry 和Emery [1], 我们定义 $\Gamma : V^R \times V^R \rightarrow V^R$:

$$\Gamma(f, g)(x) = \frac{1}{2} \{f(x)\mathcal{L}g(x) + g(x)\mathcal{L}f(x) - \mathcal{L}(f(x)g(x))\},$$

那么,

$$\Gamma_2(f, g)(x) = \frac{1}{2} \{\Gamma(f, \mathcal{L}g)(x) + \Gamma(g, \mathcal{L}f)(x) - \mathcal{L}\Gamma(f, g)(x)\}.$$

如果

$$\Gamma_2(f, f)(x) \geq \frac{1}{m} (\mathcal{L}f(x))^2 + \xi \Gamma(f, f)(x),$$

我们说对于 $m > 1$ 和 $f \in V^R$, $\mathcal{L}$ 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$. 在2010年, Y. Lin 和 S. T. Yau 在[9]中引入了曲率-维数不等式 $CD(m, \kappa)$, 并证明了对于任

意连通有限图, 如果 d 是有限的, 则满足 $CD(2, \frac{2}{d} - 1)$, 如果 d 是无限的, 则满足 $CD(2, -1)$ 这里 $d = \sup_{x \in V} \sup_{y \sim x} \frac{d_x}{\mu_{xy}}$. 他们还证明了在Bakry 和Emery的定义的意义下, Ricci flat图具有非负Ricci 曲率。事实上, 在大多数情况下, Ricci 曲率为零, 除了一些特殊情况, 如完全图(任意两个顶点之间有边相连), Ricci 曲率为正的。

在2014年, F. Chung, Y. Lin 和S. T. Yau 在[4]中, 假设图 G 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, $\xi \geq 0$, 对于一般图得到了一个改进的Harnack型不等式, 并由此得到最小特征值的一个下界估计, 推广了以前的结论。

在2014年, Y. Lin 和S. T. Yau 在[2]中, 引入 $CDE(n, K)$ 。如果对 $x \in V$, $f(x) > 0$ 满足 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ 且 $\Delta f(x) < 0$, 我们有

$$\Gamma_2(f)(x) - \Gamma(f, \frac{\Gamma(f)}{f}) \geq \frac{1}{n}(\Delta f(x))^2 + K\Gamma(f)(x),$$

或者

$$\tilde{\Gamma}_2(f)(x) := \frac{1}{2}\Delta\Gamma(f) - \Gamma(f, \frac{\Delta(f^2)}{2f}) \geq \frac{1}{n}(\Delta f(x))^2 + K\Gamma(f)(x)$$

我们说 G 满足 $CDE(n, K)$ 。由此他们得到Harnack型不等式和特征值的估计。

在本文, 对于齐性图, 我们证明了

$$\begin{aligned} \Gamma_2(f, f)(x) = & \frac{1}{4k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2 \\ & - \frac{1}{2k^2} \sum_{a \in K} [\sum_{b \in K} (f(abx) - f(bax))] [f(x) - f(ax)]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

假设图 G 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, 由此得到了Harnack和logarithmic Harnack 型不等式以及特征值估计。对于一般图, 我们假设图 G 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, 得到logarithmic Harnack 型不等式以及特征值估计。另外, 在上述基础上, 我们进一步假设图 G 满足不等式 $CED(m, \xi)$, 进一步改进了以前的结论。

1.2.2 超图的谱问题

对于超图 H , 它的谱半径是指超图 H 的邻接矩阵的最大特征值。对于一般图, 在1970年Smith [60]分类了谱半径最多是2的图. 谱半径小于2图分别为: A_n ,

D_n, E_6, E_7 和 E_8 , 谱半径等于2图分别为: $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{D}_8$. 这些图形在网络中有很重要的应用。对于一般图, 2是最小的谱半径的极限点。另外一个极限点是 $\sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx 2.0582$. Smith 和 Hoffman [31, 32] 提出了很多重要的方法去研究谱半径。Shearer [59] 证明了对于任意的 $\lambda \geq \sqrt{2 + \sqrt{5}}$ 存在一序列 $\{G_n\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(G_n) = \lambda$. Cvetković et al. [27] 对于 $2 < \rho(G) \leq \sqrt{2 + \sqrt{5}}$ 给出了几乎完整的图形。Brouwer 和 Neumaier [22] 完善了上述结论。Wang et al. [62] 研究了一类谱半径接近 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 的图。Woo-Neumaier [63] 和 Lan-Lu [48] 研究了 $\sqrt{2 + \sqrt{5}} < \rho(G) < \frac{3}{2}\sqrt{2}$ 的图的结构。

在本文, 我们研究一致超图的分类。给定一个超图 H , 对任一个算子, $[x_i] \in \mathbb{R}^n$, 其多项式形式为

$$P_H([x_i]) = r! \sum_{\{i_1, \dots, i_r\}} x_{i_1} \cdots x_{i_r}.$$

超图 H 的谱半径 $\rho(H)$ 就是上述多项式在约束条件 $\|x\|_k = 1$ 下的最大值:

$$\rho(H) = \max_{\|x\|_k=1} P_H(x).$$

我们计算得出第一个谱半径的极限值是 $\rho_r := (r-1)! \sqrt[r]{4}$. 对谱半径至多为 $(r-1)! \sqrt[r]{4}$ 的超图进行了完全分类。

另一个谱半径的极限点是 $\rho'_r = (r-1)! \beta^{-\frac{1}{r}}$, 这里 $\beta = -\frac{1}{6} \cdot (100 + 12 \cdot \sqrt{69})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3 \cdot (100 + 12 \cdot \sqrt{69})^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3} \approx 0.2451223338$. 我们研究谱半径 $\rho(H)$ 为 $\rho_r < \rho(H) \leq \rho'_r$ 的超图。

第三个谱半径的极限点是 $(r-1)! \sqrt[r]{2 + \sqrt{5}}$. 我们刻画出了谱半径至多为 $(r-1)! \sqrt[r]{2 + \sqrt{5}}$ 的超图的结构。

1.3 本文的研究方法及完成的知识创新

本文首先借助于 Y. Lin 和 S. T. Yau 将微分几何和偏微分方程引入图论的一些结果, 进一步研究图的谱问题, 具体来讲, 主要借助于 $CD(m, \xi)$ 与 $CED(m, \xi)$ 不等式研究图的特征值估计, 并把特征值的下界估计应用于求解对数 Sobolev 常数的估计; 另一方面, 借助于线性代数、矩阵理论等, 利用 α -正规, α -次正规, α -超正规的相关结论及 MATLAB、MAPLE 程序对超图进行了分类。本文完成的知识创新如下:

1. 对于一些一般图, 得到改进的Harnack 型不等式, 并利用上述不等式得到新的特征值估计; 另外, 作为谱理论的应用, 利用得到的对数Harnack型不等式, 并结合特征值的下界估计, 得到对数Sobolev常数的估计;
2. 以前文献中根据谱半径对一般图进行了分类, 我们利用发现的新方法及MATLAB、MAPLE 程序首次实现了对超图的分类, 填补了对超图分类的空白。

第二章 预备知识

在本章，我们主要给出关于图和超图的一些基本概念和记号，以及一些定义与引理。其中，大多数定义和引理为本文新创，尤其是有关超图的部分，这些引理为我们后面对超图的分类提供了关键的思想方法。

2.1 有关一般图的相关概念与记号

令 G 表示一个图，顶点集合为 V ，边集为 E 。顶点 x 的度，用 d_x 表示，是指与 x 相连的边的个数。如果对 V 的每个顶点 x ， d_x 是有限的，称 G 是局部有限图。两个顶点之间的距离是指连接它们的最少的边的数目，而图 G 的直径是指所有顶点之间距离的最大值。我们用 $x \sim y$ 表示 x 与 y 相连， $\{x, y\}$ 表示连接 x 与 y 的边， μ_{xy} 表示边 $\{x, y\}$ 的权。

假设群 χ 作用在 V 上使得：

- (i) 对所有的 $a \in \chi$, $\{au, av\} \in E$ 当且仅当 $\{u, v\} \in E$;
- (ii) 对于任意两个顶点 u 和 v , 存在 $a \in \chi$ 使得 $au = v$,

那么我们说 G 是由群 χ 生成的齐性图。进一步，我们用边生成集 $K \subset \chi$ 描述边集，那么，对于 $v \in V$ 和 $a \in K$, G 的每条边可以用 $\{v, av\}$ 来表示。令 K 包含 k 个元素且 K 具有对称性，亦即， $a \in K$ 当且仅当 $a^{-1} \in K$ 。如果对于任意的 $a \in K$ ，我们有 $aKa^{-1} = K$ ，我们说图 G 关于 K 是不变的。如果 χ 是阿贝尔群，我们称 G 是阿贝尔齐性图。

令 $V^R = \{f | f : V \rightarrow R\}$ ，则图 G 的Laplace算子 $\mathcal{L}$ 为

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)], \quad \forall f \in V^R.$$

如果 $f : V \rightarrow R$ 满足 $\mathcal{L}f(x) = \lambda f(x)$ ，那么我们称 f 是 G 上Laplace算子 $\mathcal{L}$ 的以 λ 为特征值的特征函数。易知0是 $\mathcal{L}$ 的对应于特征函数为常数的特征值。

根据Bakry 和Emery [1], 我们定义双线性算子 $\Gamma : V^R \times V^R \rightarrow V^R$ 为

$$\Gamma(f, g)(x) = \frac{1}{2} \{f(x)\mathcal{L}g(x) + g(x)\mathcal{L}f(x) - \mathcal{L}(f(x)g(x))\}.$$

图 G 上Ricci 算子 Γ_2 为

$$\Gamma_2(f, g)(x) = \frac{1}{2} \{ \Gamma(f, \mathcal{L}g)(x) + \Gamma(g, \mathcal{L}f)(x) - \mathcal{L}\Gamma(f, g)(x) \}.$$

进一步, 我们有

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2, \\ \Gamma(f, f)(x) &= \frac{1}{2} \rho(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2. \end{aligned}$$

定义2.1.1 对于 $m > 1$ 和任意 $f \in V^R$, 如果

$$\Gamma_2(f, f)(x) \geq \frac{1}{m} (\mathcal{L}f(x))^2 + \xi \Gamma(f, f)(x),$$

我们称算子 $\mathcal{L}$ 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$.

我们称 m 为算子 $\mathcal{L}$ 的维数, 称 ξ 为算子 $\mathcal{L}$ 的Ricci曲率的下界. 容易验证对于 $m < \tilde{m}$, 如果算子 $\mathcal{L}$ 满足 $CD(m, \xi)$, 那么它满足 $CD(\tilde{m}, \xi)$.

如果 $\Gamma_2(f, f)(x) \geq \xi \Gamma(f, f)(x)$, 我们说 $\mathcal{L}$ 满足 $CD(\infty, \xi)$.

定义2.1.2 如果对图 G 的每一个 $x \in V$ 和函数 $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ($f(x)$ 恒正) 使得 $\Delta f(x) < 0$, 我们有

$$\Gamma_2(f)(x) - \Gamma(f, \frac{\Gamma(f)}{f}) \geq \frac{1}{n} (\Delta f(x))^2 + K \Gamma(f)(x),$$

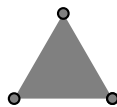
或等价地

$$\tilde{\Gamma}_2(f)(x) := \frac{1}{2} \Delta \Gamma(f) - \Gamma(f, \frac{\Delta(f^2)}{2f}) \geq \frac{1}{n} (\Delta f(x))^2 + K \Gamma(f)(x),$$

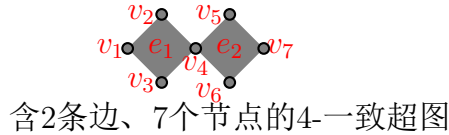
我们称 G 满足指数曲率-维数不等式 $CDE(n, K)$.

2.2 有关超图的相关概念、记号和一些重要引理

对于一般的图, 一条边只能连接两个节点. 如果一条边可以连接多个节点, 这样的图称为超图. 超图的边称为超边. 如下面的图, 此图可以看做是含有一条边, 这条边连接3个节点的超图.



如果一个超图的每条边含有相同数目如 r 个节点, 称此超图为 r -一致超图。我们令 $H = (V, E)$ 表示 r -一致超图, 其中, V 是节点集合, E 是超边集合且 $E \subset \binom{V}{r}$. 如下图为一个含2条边、7个节点的4-一致超图, 其中节点集合 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, 超边集合 $E = \{e_1, e_2\} = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_4, v_5, v_6, v_7\}\}$.



节点 v 的度, 用 d_v 表示, 是指包含 v 的边的数目。如果 $d_v = 1$, 我们称 v 是叶节点。超图 H 上的通道是指对所有 $1 \leq i \leq l$, 满足 v_{i-1} 和 v_i 属于边 e_i 的一系列节点和边的集合 $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_l$. 节点 v_0 和 v_l 称为这条通道的终点. 这条通道的长度是指这条通道上边的数目。如果在这条通道上所有的边是不同的, 称这条通道为路径。如果 $v_l = v_0$, 称这条通道是闭合的, 此时, 在这条通道上如果所有的边和节点是不同的, 称这条通道为一个圈。如果对任一对节点 (u, v) , 有一条路径连接 u 和 v , 称超图 H 是连通的。如果 H 是连通的且无圈, 称 H 为超树。如果任两条边至多相交一个节点, 称 H 是简单超图。事实上, 任意非简单超图至少包含一个2-圈: $v_1 F_1 v_2 F_2 v_1$, 亦即, $v_1, v_2 \in F_1 \cap F_2$. 超树一定是简单图。

定义2.2.1 [23, 26, 47, 54] 给定一个 r -一致超图 H , 对于任意的算子 $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, H 的多项式函数 $P_H(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$P_H(\mathbf{x}) = r! \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \in E(H)} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}.$$

对任意的 $p \geq 1$, H 的最大 p -特征值定义为

$$\lambda_p(H) = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} P_H(\mathbf{x}).$$

在本文, 我们定义 r -一致超图 H 的谱半径为 $\rho(H) = \lambda_r(H)$. 等价地, 我们有

$$\rho(H) = r! \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \in E(H)} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}}{\sum_{i=1}^n x_i^r}. \quad (2.1)$$

方程(2.1)中的分式称作Raileigh商. 使(2.1)取得最大值的非零向量 $\mathbf{x}$ 称做对应于谱半径 $\rho(H)$ 的特征向量。如果 $\mathbf{x}$ 是对应于谱半径 $\rho(H)$ 的特征向量, 对于任意

的 $c > 0$, $c\mathbf{x}$ 也是对应于谱半径 $\rho(H)$ 的特征向量。如果特征向量 $\mathbf{x}$ 中元素都是正的, 亦即 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{>0}^n$, 那么我们称 $\mathbf{x}$ 为 H 的一个 Perron-Frobenius 算子。

引理2.2.2 [26, 47, 54] 如果 H 是连通的 r -一致超图, 那么 H 的 Perron-Frobenius 算子存在。

由拉格朗日乘数法易知, 对任意节点 v , Perron-Frobenius 算子 $\mathbf{x}$ 满足

$$(r-1)! \sum_{\{v, i_2, \dots, i_r\} \in E(H)} x_{i_2} \cdots x_{i_r} = \rho(H) x_v^{r-1}. \quad (2.2)$$

作为引理2.2.2的推论, 我们有下面重要的引理。

引理2.2.3 [26, 47, 54] 如果 G 是连通的 r -一致超图, H 是 G 的真子图, 那么

$$\rho(H) < \rho(G).$$

定义2.2.4 超图 H 的加权关联矩阵 B 是一个 $|V| \times |E|$ 矩阵, 这个矩阵满足: 对任意节点 v 和边 e , 如果 $v \in e$, 则 $B(v, e) > 0$; 如果 $v \notin e$, 则 $B(v, e) = 0$ 。

定义2.2.5 如果超图 H 的加权关联矩阵 B 满足

1. 对任意 $v \in V(H)$, 有 $\sum_{e: v \in e} B(v, e) = 1$,
2. 对任意 $e \in E(H)$, 有 $\prod_{v \in e} B(v, e) = \alpha$,

则称 H 为 α -正规的。进一步, 如果对任意圈 $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_l (v_l = v_0)$

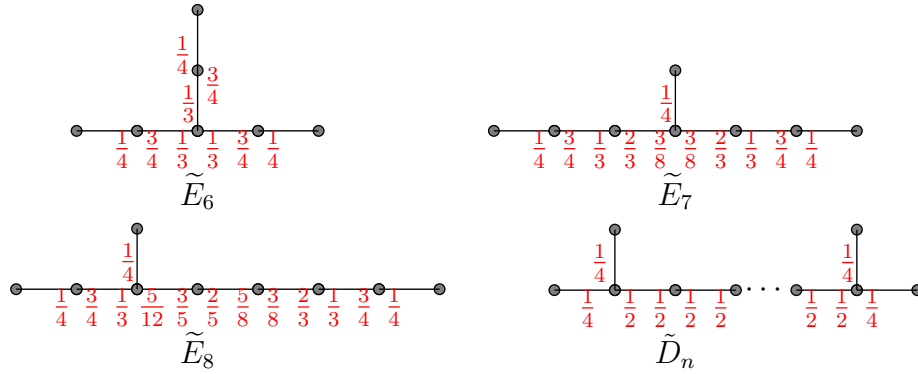
$$\prod_{i=1}^l \frac{B(v_i, e_i)}{B(v_{i-1}, e_i)} = 1$$

我们称超图 H 是一致 α -正规的。

例2.2.6 我们考虑圈 C_n . 对任意 $v \in e$, 定义 $B(v, e) = \frac{1}{2}$. 所以 C_n 是 $\frac{1}{4}$ -正规的。

当 H 是超树, H 的关联矩阵 B 一定是一致的。下面是一些 $\frac{1}{4}$ -正规的一般图。

例2.2.7 下面的图: $\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, 和 $\tilde{E}_8$, 都是 $\frac{1}{4}$ -正规的。我们可以通过对节点 v 所在的边 e 的一旁进行标号 $B(v, e)$ 来证明。如果 v 是一个叶节点, 标号为 1, 我们删除这种标号。



显然易见, 所有谱半径为2的连通图是一致 $\frac{1}{4}$ -正规的. 谱半径和 α -正规标号之间的关系可以由下列引理给出:

引理2.2.8 H 是连通 r -一致超图, 当且仅当 H 是一致 α -正规且 $\alpha = ((r-1)!/\rho(H))^r$ 时, H 的谱半径是 $\rho(H)$.

证明. 首先我们证明必要性. 令 $x := (x_1, \dots, x_n)$ 是 H 的Perron-Frobenis 算子. 定义加权关联矩阵如下:

$$B(v, e) = \begin{cases} \frac{(r-1)! \prod_{u \in e} x_u}{\rho(H) x_v^r} & (v \in e) \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

由定义, 对任意边 e , 我们有

$$\prod_{v \in e} B(v, e) = \prod_{v \in e} \frac{(r-1)! \prod_{u \in e} x_u}{\rho(H) x_v^r} = \left(\frac{(r-1)!}{\rho(H)} \right)^r = \alpha.$$

由于Perron-Fronbenis 算子 $\mathbf{x}$ 满足方程(2.2), 对于 $v \in V$, 我们有

$$\sum_e B(v, e) = \sum_{\{v, i_2, \dots, i_r\} \in E(H)} \frac{(r-1)! \prod_{u \in e} x_u}{\rho(H) x_v^r} = \frac{\rho(H)}{\rho(H)} = 1.$$

对任意圈 $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_l (v_l = v_0)$, 我们有

$$\prod_{i=1}^l \frac{B(v_i, e_i)}{B(v_{i-1}, e_i)} = \prod_{i=1}^l \frac{x_{v_{i-1}}^r}{x_{v_i}^r} = 1.$$

所以 B 是一致 α -正规的.

我们证明充分性如下。假设 B 是一致 α -正规的加权关联矩阵。对于任意非零算子 $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, 我们有

$$\begin{aligned} r! \sum_{\{x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_r}\} \in E(H)} x_{v_1} x_{v_2} \cdots x_{v_r} &= \frac{r!}{\alpha^{\frac{1}{r}}} \sum_{e \in E(H)} \prod_{v \in e} (B^{\frac{1}{r}}(v, e) x_v) \\ &\leq \frac{r!}{\alpha^{\frac{1}{r}}} \sum_{e \in E(H)} \frac{\sum_{v \in e} (B(v, e) x_v^r)}{r} \\ &= \frac{(r-1)!}{\alpha^{\frac{1}{r}}} \|x\|_r^r. \end{aligned} \quad (2.3)$$

因此 $\rho(H) \leq \frac{(r-1)!}{\alpha^{\frac{1}{r}}}$. 当 H 是 α -正规的且下列方程组有非零解时, 等号成立,

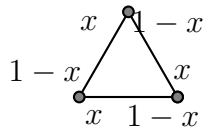
$$B(v_{i_1}, e)^{1/r} \cdot x_{i_1} = B(v_{i_2}, e)^{1/r} \cdot x_{i_2} = \cdots = B(v_{i_r}, e)^{1/r} \cdot x_{i_r}, \forall e = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}\} \in E(H). \quad (2.4)$$

任取节点 v_0 , 令 $x_{v_0}^* = 1$, 如果存在路径 $v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_l (= u)$ 连接 v_0 和 u , 定义

$$x_u^* = \left(\prod_{i=1}^l \frac{B(v_{i-1}, e_i)}{B(v_i, e_i)} \right)^{1/r}.$$

因为 H 是连通的, 这样的路径一定存在, 并且一致性条件保证了 x_u^* 的选择与路径无关。易知 $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ 是方程 (2.4) 的一个解。因此, $\rho(H) = \frac{(r-1)!}{\alpha^{\frac{1}{r}}}$. $\square$

注2.2.9 如果 H 是简单的超树, 那么一致性条件自然满足。一般情况下, H 是 α -正规的不意味着 $\rho(H) = (r-1)! \alpha^{-\frac{1}{r}}$. 我们考虑下面的例子 $H = C_3$,



对于任意的 $x \in (0, 1)$, C_3 是 $x(1-x)$ -正规的, 但不具有一致性, 除非 $x = \frac{1}{2}$. 因此, $\rho(H) = 2 \leq [x(1-x)]^{-\frac{1}{2}}$.

我们经常需要将谱半径和其它值相比较, 下面的定义提供了这种方法。

定义2.2.10 如果超图 H 存在加权关联矩阵 B 满足

1. 对任意 $v \in V(H)$, 有 $\sum_{e: v \in e} B(v, e) \leq 1$,

2. 对任意 $e \in E(H)$, 有 $\prod_{v \in e} B(v, e) \geq \alpha$,

那么, 称 H 是 α -次正规的. 进一步, 如果 H 是 α -次正规的, 但不是 α -正规的, 称 H 是严格 α -次正规的.

我们有下面的引理:

引理2.2.11 令 H 是 r -一致超图. 如果 H 是 α -次正规的, 那么 H 的谱半径满足

$$\rho(H) \leq (r-1)! \alpha^{-\frac{1}{r}}.$$

另外, 如果 H 是严格 α -次正规的, 那么 $\rho(H) < (r-1)! \alpha^{-\frac{1}{r}}$.

证明. 证明类似于不等式(2.3). 对于任意非零算子 $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, 我们有

$$\begin{aligned} r! \sum_{\{x_{v_1}, x_{v_2}, \dots, x_{v_r}\} \in E(H)} x_{v_1} x_{v_2} \cdots x_{v_r} &\leq \frac{r!}{\alpha^{\frac{1}{r}}} \sum_{e \in E(H)} \prod_{v \in e} (B^{\frac{1}{r}}(v, e) x_v) \\ &\leq \frac{r!}{\alpha^{\frac{1}{r}}} \sum_{e \in E(H)} \frac{\sum_{v \in e} (B(v, e) x_v^r)}{r} \\ &\leq \frac{(r-1)!}{\alpha^{\frac{1}{r}}} \|\mathbf{x}\|_r^r. \end{aligned}$$

所以 $\rho(H) \leq \frac{(r-1)!}{\alpha^{\frac{1}{r}}}$. 当 H 是严格 α -次正规时, 有 $\rho(H) < \frac{(r-1)!}{\alpha^{\frac{1}{r}}}$. □

定义2.2.12 如果超图 H 存在加权关联矩阵 B 满足

1. 对任意 $v \in V(H)$, 有 $\sum_{e: v \in e} B(v, e) \geq 1$,

2. 对任意 $e \in E(H)$, 有 $\prod_{v \in e} B(v, e) \leq \alpha$,

称 H 是 α -超正规的. 进一步, 如果 H 是 α -超正规的但不是 α -正规的, 称 H 是严格 α -超正规的.

我们有下面的引理:

引理2.2.13 令 H 是 r -一致超图. 如果 H 是严格一致 α -超正规的, 那么 H 的谱半径满足

$$\rho(H) > (r-1)! \alpha^{-\frac{1}{r}}.$$

证明. 类似于引理2.2.8的证明, 一致性条件说明方程(2.4)存在一个正解 $\mathbf{x} = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. 我们有

$$\begin{aligned} r! \sum_{\{x_{v_1}^*, x_{v_2}^*, \dots, x_{v_r}^*\} \in E(H)} x_{v_1}^* x_{v_2}^* \cdots x_{v_r}^* &\geq \frac{r!}{\alpha^{\frac{1}{r}}} \sum_{e \in E(H)} \prod_{v \in e} (B^{\frac{1}{r}}(v, e) x_v^*) \\ &= \frac{r!}{\alpha^{\frac{1}{r}}} \sum_{e \in E(H)} \frac{\sum_{v \in e} (B(v, e) (x_v^*)^r)}{r} \\ &\geq \frac{(r-1)!}{\alpha^{\frac{1}{r}}} \|x^*\|_r^r. \end{aligned}$$

所以, $\rho(H) \geq \frac{(r-1)!}{\alpha^{\frac{1}{r}}}$. 当 H 是严格 α -超正规时, 我们有 $\rho(H) > \frac{(r-1)!}{\alpha^{\frac{1}{r}}}$. $\square$

引理2.2.14 设 $0 < \beta < \frac{1}{4}$, 令 $f(x) = \frac{\beta}{1-x}$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ ($n \geq 2$).

1. 如果 $0 < x \leq \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 那么 $f^n(x)$ 关于 n 单调递增, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 显然, 当 $x = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$ 时, $f^n(x) = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \forall n \geq 1$.
2. 如果 $\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 那么 $f^n(x)$ 关于 n 单调递减, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$.

证明. 我们首先证明第一条. 由于 $0 < x \leq \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 当 $x = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$ 时, 函数 $f(x) = \frac{\beta}{1-x}$ 取最大值. 因此, $0 < f(x) \leq \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 类似地, 当 $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$ 时, $f^2(x) = \frac{\beta}{1-f(x)}$ 取最大值. 因此, 我们得 $0 < f^2(x) \leq \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 用同样的方法, 我们得 $0 < f^n(x) \leq \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, n \geq 3$. 另一方面, 如果 $0 < f^n(x) < \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 我们容易验证 $f^n(x) - f^{n-1}(x) = \frac{\beta}{1-f^{n-1}(x)} - f^{n-1}(x) = \frac{\beta - f^{n-1}(x) + (f^{n-1}(x))^2}{1-f^{n-1}(x)} > 0, n \geq 2$. 因此, 对任意 $n \geq 2$, 有 $f^{n-1}(x) < f^n(x)$. 由此, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = f_0(x)$, 由 $f^n(x) = \frac{\beta}{1-f^{n-1}(x)}$, 我们得 $f_0(x) = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 第二条的证明与第一条非常类似, 我们在这里不再给出证明. $\square$

第三章 Harnack 不等式和对数Harnack 不等式以及它们的应用

在本章, 我们主要利用曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$ 得出Harnack型不等式和对数Harnack型不等式, 并利用Harnack型不等式得出图的特征值的下界估计; 另外, 由对数Harnack型不等式和特征值的下界估计值得出对数Sobolev 常数的估计. 最后, 由指数曲率-维数不等式 $CDE(m, K)$ 得出改进的Harnack型不等式, 并由此不等式得到图的Laplace矩阵的最小特征值的上界估计.

3.1 齐性图上关于Dirichlet 特征值的Harnack型不等式和特征值估计

3.1.1 一些概念和主要定理

对于图 G_0 , 令顶点集合 $V = V(G_0)$ 的子集为 G , 由 G 所生成的子图包含 G 中顶点在 G_0 中的所有边。有两种类型的边界, 子图 G 的顶点边界 δG 包含所有顶点不在 G 中但与 G 中一些顶点相连的顶点; 边边界 ∂G 包含一个端点在 G 中而另一个端点不在 G 中而在原图中的所有边。我们仍用 G 来表示子图。

对于具有非空边界的子图 G 来说, 根据不同的边界条件, 有两种类型的特征值, Dirichlet特征值和Neumann 特征值, 我们这里只考虑Dirichlet 特征值, 且对边界 δG 中任意顶点 x , 有 $f(x) = 0$. 令 $V^R = \{f|f : V \rightarrow R\}$, 图 G 上的Laplace 算子 L 为:

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)], \quad \forall f \in V^R.$$

G_0 的子图 G 的Dirichlet特征值定义为:

$$\lambda = \inf_{f \neq 0} \frac{\sum_{x, y \in G \cup \delta G} (f(x) - f(y))^2}{k \sum_{x \in G} f^2(x)}.$$

如果对任意子集 $X \subset \delta G$, 它的邻域 $N(X) = \{y : y \sim x \in X\}$ 满足

$$|N(X) \setminus (G \cup \delta G)| = |y \in G \cup \delta G : y \sim x \in X| \geq |X|,$$

我们称 G_0 的带有节点边界 δG 的子图 G 是凸的. 在本节, 假设凸子图 G 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, 我们得到改进的Harnack 不等式和特征值估计, 所得结论比文章[6] 和[8]中结论要强. 我们的主要定理如下:

定理3.1.1 设 G 是齐性图上的有限凸子图, 且满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, G 的边生成集为 K , K 包含 k 个元素. 令 $f \in V^R$ 为 $\mathcal{L}$ 的调和特征函数, 对应的Dirichlet特征值为 $\lambda \neq 0$, 那么, 对所有 $x \in V$ 和 $\alpha > 2 - \frac{2\xi+2}{\lambda}$, 下列不等式成立:

$$\frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2 + \alpha \lambda f^2(x) \leq \frac{(\alpha^2 + 2 - \frac{4}{m})\lambda + 2\alpha\xi + 2\alpha}{(\alpha - 2)\lambda + 2\xi + 2} \cdot \lambda \cdot \max_{z \in V} f^2(z).$$

取 $\alpha = 4 - \frac{2\xi+2}{\lambda} \geq 0$, 我们可得

定理3.1.2 设 G 是齐性图上的有限凸子图, 且满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, G 的边生成集为 K , K 包含 k 个元素. 令 $f \in V^R$ 为Laplacian算子 $\mathcal{L}$ 的调和特征函数, 对应的Dirichlet特征值为 $\lambda \neq 0$, 那么, 对所有 $x \in V$, 下列不等式成立:

$$\frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2 \leq [(9 - \frac{2}{m})\lambda - 4\xi - 4] \max_{z \in V} f^2(z).$$

我们可以用定理3.1.2中的Harnack 不等式得到一个特征值的下界估计, 如下:

定理3.1.3 设 G 是齐性图上的有限凸子图, 且满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, λ 是 G 上Laplace算子 $\mathcal{L}$ 的非零Dirichlet 特征值, 那么

$$\lambda \geq \frac{m + 4mkD^2(\xi + 1)}{(9m - 2)kD^2},$$

这里 D 是 G 的直径.

推论3.1.4 设 G 是齐性图上的有限凸子图, 且满足曲率-维数不等式 $CD(m, 0)$, λ 是 G 上Laplace算子 $\mathcal{L}$ 的非零Dirichlet 特征值, 那么

$$\lambda \geq \frac{1 + 4kD^2}{(9 - \frac{2}{m})kD^2},$$

这里 D 是 G 的直径.

注3.1.5 我们的结果推广了[6]和[8]中的结果。文章[6]和[8]证明了 $\lambda \geq \frac{1}{8kD^2}$, 然而由推论3.1.4, 由于 $m > 1$, 我们容易验证

$$\lambda \geq \frac{1 + 4kD^2}{(9 - \frac{2}{m})kD^2} > \frac{5}{(9 - \frac{2}{m})kD^2} > \frac{1}{8kD^2}.$$

3.1.2 定理3.1.1的证明

我们首先证明下列引理。

引理3.1.6 令 G 为齐性图上的凸子图, G 的边生成集为 K , K 包含 k 个元素. 那么, 对所有 $f \in V^R$ 和 $x \in V$, G 上的Ricci曲率算子 Γ_2 满足:

$$\Gamma_2(f, f)(x) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}f(x))^2 - \frac{1}{2}\rho(x) + \frac{1}{4k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2.$$

引理3.1.7 令 G 为齐性图上的凸子图, 且满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, G 的边生成集为 K , K 包含 k 个元素. 那么, 对所有 $x \in V$, 我们有

$$-\frac{1}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2 \leq (2 - \frac{4}{m})(\mathcal{L}f(x))^2 - 2(1 + \xi)\rho(x).$$

证明. 由于 G 满足 $CD(m, \xi)$, 我们有

$$\Gamma_2(f, f)(x) \geq \frac{1}{m}(\mathcal{L}f(x))^2 + \xi\Gamma(f, f)(x).$$

由引理3.1.6和上述不等式, 我们得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\mathcal{L}f(x))^2 - \frac{1}{2}\rho(x) + \frac{1}{4k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2 \\ & \geq \frac{1}{m}(\mathcal{L}f(x))^2 + \frac{\xi}{2}\rho(x). \end{aligned}$$

因此, 有

$$-\frac{1}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2 \leq (2 - \frac{4}{m})(\mathcal{L}f(x))^2 - 2(1 + \xi)\rho(x).$$

□

引理3.1.8 ([6]) 给定 G_0 的凸子图 G , 对于 $x \in \delta G$, $y \in G$ 和 $f(x) = 0$, $f: G \cup \delta G \rightarrow R$ 满足 $\sum_{y \sim x} (f(x) - f(y)) = \lambda f(x)d_x$ 可以推广到 G_0 的所有与 $G \cup \delta G$ 中顶点相邻的顶点, 使得对于 $z \in G \cup \delta G$, $f(z)$ 满足 $\sum_{y \sim z} (f(z) - f(y)) = \lambda f(z)d_z$, 这里 d_z 代表 G_0 中顶点 z 的度.

定理3.1.1的证明. 由引理3.1.8, f 可用于与 $G \cup \delta G$ 中顶点相连的所有顶点. 那么, 对任意 $\alpha > 0$, 我们有

$$\phi(x) = \frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2 + \alpha \lambda f^2(x).$$

我们考虑

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\phi(x) &= \frac{1}{k} \sum_{b \in K} [\phi(x) - \phi(bx)]^2 \\ &= + \frac{\alpha \lambda}{k} \sum_{b \in K} [f^2(x) - f^2(bx)] \\ &\quad \frac{1}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} \{[f(x) - f(ax)]^2 - [f(bx) - f(abx)]^2\} \\ &= Z + Y, \end{aligned}$$

这里 Z 和 Y 分别代表上述第二个等式中的第一项和第二项。

因为 G 是不变的齐性图, 有 $\sum_{b \in K} [f(abx) - f(bax)] = 0$. 由引理3.1.7 和上述等式, 我们有

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} \{[f(x) - f(ax)]^2 - [f(bx) - f(abx)]^2\} \\ &= \frac{2}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)][f(x) - f(ax)] \\ &\quad - \frac{1}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2 \\ &\leq (2 - \frac{4}{m})(\mathcal{L}f(x))^2 + \frac{2}{k^2} \sum_{a \in K} [\sum_{b \in K} (f(abx) - f(bax))][f(x) - f(ax)] \\ &\quad + \frac{2}{k^2} \sum_{a \in K} \{ \sum_{b \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(bax)] \} [f(x) - f(ax)] - (2 + 2\xi)\rho(x) \\ &= (2 - \frac{4}{m})(\mathcal{L}f(x))^2 + \frac{2}{k^2} \sum_{a \in K} [\sum_{b \in K} (f(abx) - f(bax))][f(x) - f(ax)] - (2 + 2\xi)\rho(x) \\ &\quad + \frac{2}{k} \sum_{a \in K} \{ \frac{1}{k} \sum_{b \in K} [f(x) - f(bx)] - \frac{1}{k} \sum_{b \in K} [f(ax) - f(bax)] \} [f(x) - f(ax)] \\ &= (2 - \frac{4}{m})(\mathcal{L}f(x))^2 + \frac{2\lambda}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2 - (2 + 2\xi)\rho(x) \\ &= (2\lambda^2 - \frac{4\lambda^2}{m})f^2(x) + (2\lambda - 2\xi - 2)\rho(x). \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{\alpha\lambda}{k} \sum_{b \in K} [f^2(x) - f^2(bx)] \\
 &= -\frac{\alpha\lambda}{k} \sum_{b \in K} [f(x) - f(bx)]^2 + \frac{2\alpha\lambda}{k} \sum_{b \in K} f(x)[f(x) - f(bx)] \\
 &= 2\alpha\lambda^2 f^2(x) - \alpha\lambda\rho(x).
 \end{aligned}$$

由上面结果, 对任意 $\alpha > 0$, 我们有

$$\mathcal{L}\phi(x) \leq (2\lambda^2 + 2\alpha\lambda^2 - \frac{4\lambda^2}{m})f^2(x) + (2\lambda - \alpha\lambda - 2\xi - 2)\rho(x).$$

因为 G 是有限图, 存在 G 的一个顶点 v , 使得 $\phi(x)$ 在 v 处取得最大值。因此, 我们有

$$0 \leq \mathcal{L}\phi(v) \leq (2\lambda^2 + 2\alpha\lambda^2 - \frac{4\lambda^2}{m})f^2(v) + (2\lambda - \alpha\lambda - 2\xi - 2)\rho(v).$$

所以, 对任意的 $\alpha > 2 - \frac{2\xi+2}{\lambda}$,

$$\rho(v) \leq \frac{(2 + 2\alpha - \frac{4}{m})\lambda^2}{(\alpha - 2)\lambda + 2\xi + 2} f^2(v)$$

因此, 对每一个 $x \in V$, 我们得

$$\begin{aligned}
 \rho(x) + \alpha\lambda f^2(x) &\leq \rho(v) + \alpha\lambda f^2(v) \\
 &\leq \frac{(2 - \frac{4}{m} + 2\alpha)\lambda^2}{(\alpha - 2)\lambda + 2\xi + 2} f^2(v) + \alpha\lambda f^2(v) \\
 &\leq \frac{(\alpha^2 + 2 - \frac{4}{m})\lambda + 2\alpha\xi + 2\alpha}{(\alpha - 2)\lambda + 2\xi + 2} \cdot \lambda \cdot \max_{z \in V} f^2(z).
 \end{aligned}$$

所以,

$$\frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2 + \alpha\lambda f^2(x) \leq \frac{(\alpha^2 + 2 - \frac{4}{m})\lambda + 2\alpha\xi + 2\alpha}{(\alpha - 2)\lambda + 2\xi + 2} \cdot \lambda \cdot \max_{z \in V} f^2(z).$$

3.1.3 定理3.1.3的证明

在这一节, 由定理3.1.2 中的Harnack 不等式, 我们证明定理3.1.3.

证明. 令 $f \in V^R$ 为Laplacian算子 $\mathcal{L}$ 的调和特征函数, 对应的特征值为 $\lambda \neq 0$, 即对每一个 $x \in V$ $\mathcal{L}f(x) = \lambda f(x)$. 那么, $\sum_{x \in V} f(x) = 0$. 因此, 我们可以假设

$$\sup_{x \in V} f(x) = 1 > \inf_{x \in V} f(x) = k < 0.$$

取 $x_1, x_n \in V$ 使得 $f(x_1) = \sup_{x \in V} f(x) = 1, f(x_n) = \inf_{x \in V} f(x) = k < 0$. 令 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为连接 x_1 and x_n 的最短路径, 这里 $x_i \sim x_{i+1}$. 那么, $n \leq D, D$ 为图 G 的直径. 由定理3.1.2, 我们有

$$[f(x_i) - f(x_{i+1})]^2 \leq k\rho(x_i) \leq k[(9 - \frac{2}{m})\lambda - 4\xi - 4].$$

因此,

$$\sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i) - f(x_{i+1})]^2 \leq k[(9 - \frac{2}{m})\lambda - 4\xi - 4]D.$$

另一方面, 由Cauchy-Schwartz不等式, 得

$$\sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i) - f(x_{i+1})]^2 \geq \frac{1}{D} [f(x_n) - f(x_1)]^2 \geq \frac{1}{D}.$$

因此, 我们得

$$\lambda \geq \frac{m + 4mkD^2(\xi + 1)}{(9m - 2)kD^2}.$$

□

3.2 齐性图上的对数Harnack 不等式和借助于特征值下界估计的log-Sobolev 常数估计

在本节, 我们考虑一般齐性图上的对数Harnack型不等式. 如[5], 我们定义图 G 上的对数Sobolev常数 β 如下:

$$\beta = \inf_{f \neq 0} \frac{\sum_{y \sim x} (f(x) - f(y))^2}{\sum_x f^2(x) d_x \log f^2(x)},$$

这里 f 满足 $\sum_x f^2(x) d_x = \sum_x d_x = \text{vol}G$. 那么, 由文章[5]中定理5, 对于齐性图我们得到如下引理:

引理3.2.1 对于齐性图 G , 令 $f : V \rightarrow R$ 达到对数Sobolev常数且 $\sum_x f^2(x)k = \text{vol}G$, 那么对任意顶点 x , f 满足 $\mathcal{L}f(x) = \beta f(x) \log f^2(x)$.

对于一般的齐性图 G , 我们建立了一个新的Ricci 曲率算子, 进而, 假设齐性图 G 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, 我们得到一个改进的对数Harnack型不等式, 并借助于齐性图 G 上的特征值估计, 得到对数Sobolev常数的下界。我们的主要结论如下:

定理3.2.2 设 G 是一个齐性图, 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, $f \in V^R$ 满足

$$\mathcal{L}f(x) = \beta f(x) \log f^2(x).$$

那么, 对于 $U = \sup_x |f(x)| \geq 1$, $\sigma \geq 2$, $x \in V(G)$, 下列不等式成立

$$\sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2 \leq \frac{2k\sigma\beta(\sigma + s - 1)}{\sigma + s - 2} \cdot \max\{U^2 \log U^2 [1 + (1 - \frac{2}{m\sigma(\sigma + s - 1)}) \log U^2], 1\},$$

这里 $s > 0$ 是一个常数且满足 $\xi = s\beta$.

在定理3.2.2中令 $\sigma = 2$, 并由后面的定理3.2.6 和定理3.2.7, 我们得到下列定理3.2.3. 此定理证明与文章[5]中定理7的证明类似, 我们在这里不再给出证明过程。

定理3.2.3 设 G 是一个齐性图, 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, $f \in V^R$ 满足

$$\mathcal{L}f(x) = \beta f(x) \log f^2(x).$$

那么, 对于 $U = \sup_x |f(x)| \geq 1$, 齐性图 G 上的对数Sobolev 常数 β 满足

$$\beta \geq \min\left(\frac{1 + 4\xi k D^2}{8k(4 - \frac{1}{m})D^2}, \frac{1}{8D^2 k(\frac{1}{s} + 1) \log U^2 (1 + \log U^2)}\right),$$

这里 D 是图 G 的直径.

3.2.1 重要引理

现在, 我们为齐性图建立一些引理。通过改进文章[4]中定理1.2的证明, 我们得到下面引理:

引理3.2.4 设 G 为一般的齐性图，令它的边生成集为 K 且包含 k 个元素。那么对于所有的 $f \in V^R$ 和 $x \in V$ ，图 G 的Ricci曲率算子 $\Gamma_2(f, f)(x)$ 有下列等式成立：

$$\begin{aligned} \Gamma_2(f, f)(x) &= \frac{1}{4k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2 \\ &\quad - \frac{1}{2k^2} \sum_{a \in K} [\sum_{b \in K} (f(abx) - f(bax))] [f(x) - f(ax)]. \end{aligned}$$

证明. 首先令

$$\rho(x) = \frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2.$$

我们有

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}\Gamma(f, f) &= \mathcal{L}\rho(x) = \frac{1}{k} \sum_{b \in K} [\rho(x) - \rho(bx)] \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} \{[f(x) - f(ax)]^2 - [f(bx) - f(abx)]^2\} \\ &= \frac{2}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)][f(x) - f(ax)] \\ &\quad - \frac{1}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2 \\ &= \frac{2}{k^2} \sum_{a \in K} [\sum_{b \in K} (f(abx) - f(bax))][f(x) - f(ax)] \\ &\quad + \frac{2}{k} \sum_{a \in K} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{b \in K} [f(x) - f(bx)] - \frac{1}{k} \sum_{b \in K} [f(ax) - f(bax)] \right\} [f(x) - f(ax)] \\ &\quad - \frac{1}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2 \\ &= \frac{2}{k^2} \sum_{a \in K} [\sum_{b \in K} (f(abx) - f(bax))][f(x) - f(ax)] \\ &\quad + 2(\mathcal{L}f(x))^2 - \frac{2}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)] \mathcal{L}f(ax) \\ &\quad - \frac{1}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(x)\mathcal{L}f(x)) &= \frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x)\mathcal{L}f(x) - f(ax)\mathcal{L}f(ax)] \\
&= \frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x)\mathcal{L}f(x) - f(ax)\mathcal{L}f(x) + f(ax)\mathcal{L}f(x) - f(ax)\mathcal{L}f(ax)] \\
&= (\mathcal{L}f(x))^2 + \frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(ax) - f(x)][\mathcal{L}f(x) - \mathcal{L}f(ax)] \\
&\quad + \frac{1}{k} \sum_{a \in K} f(x)[\mathcal{L}f(x) - \mathcal{L}f(ax)] \\
&= (\mathcal{L}f(x))^2 + f(x)\mathcal{L}(\mathcal{L}f(x)) + \frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(ax) - f(x)][\mathcal{L}f(x) - \mathcal{L}f(ax)].
\end{aligned}$$

因此, 我们得

$$\begin{aligned}
\Gamma(f, \mathcal{L}f)(x) &= \frac{1}{2} \{f(x)\mathcal{L}(\mathcal{L}f(x)) + (\mathcal{L}f(x))^2 - \mathcal{L}(f(x)\mathcal{L}f(x))\} \\
&= \frac{1}{2k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)][\mathcal{L}f(x) - \mathcal{L}f(ax)] \\
&= \frac{1}{2} (\mathcal{L}f(x))^2 - \frac{1}{2k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]\mathcal{L}f(ax).
\end{aligned}$$

因此, 有

$$\begin{aligned}
\Gamma_2(f, f)(x) &= \Gamma(f, \mathcal{L}f)(x) - \frac{1}{2} \mathcal{L}\Gamma(f, f)(x) \\
&= \frac{1}{2} (\mathcal{L}f(x))^2 - \frac{1}{2k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]\mathcal{L}f(ax) \\
&\quad + \frac{1}{4k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2 \\
&\quad - \frac{1}{2k^2} \sum_{a \in K} \left[\sum_{b \in K} (f(abx) - f(bax)) \right] [f(x) - f(ax)] \\
&\quad - \frac{1}{2} (\mathcal{L}f(x))^2 + \frac{1}{2k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]\mathcal{L}f(ax) \\
&= \frac{1}{4k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2 \\
&\quad - \frac{1}{2k^2} \sum_{a \in K} \left[\sum_{b \in K} (f(abx) - f(bax)) \right] [f(x) - f(ax)].
\end{aligned}$$

□

引理3.2.5 令 G 为一般的齐性图, 设它的边生成集为 K 且包含 k 个元素, 如 G 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, 那么对于所有的 $x \in V$, 我们有

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2 \\ & + \frac{2}{k^2} \sum_{a \in K} [\sum_{b \in K} (f(abx) - f(bax))] [f(x) - f(ax)] \\ & \leq -\frac{4}{m} (\mathcal{L}f(x))^2 - 2\xi\rho(x). \end{aligned}$$

证明. 因为 G 满足 $CD(m, \xi)$, 我们得

$$\Gamma_2(f, f)(x) \geq \frac{1}{m} (\mathcal{L}f(x))^2 + \xi\Gamma(f, f)(x).$$

由引理3.2.4 和上述不等式, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(abx)]^2 \\ & - \frac{1}{2k^2} \sum_{a \in K} [\sum_{b \in K} (f(abx) - f(bax))] [f(x) - f(ax)] \\ & \geq \frac{1}{m} (\mathcal{L}f(x))^2 + \frac{\xi}{2}\rho(x). \end{aligned}$$

整理上述不等式, 我们即可得到引理中结论。 $\square$

由引理3.2.5, 我们可以得到下面定理3.2.6中的Harnack 不等式。这一不等式与文章[4]中的结论相似, 而且证明类似, 我们在这里不再给出证明。

定理3.2.6 令 G 是一个齐性图且满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, 设 $f \in V^R$ 是拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$ 的调和特征函数, 对应的特征值为 $\lambda \neq 0$, 那么对所有的 $x \in V$, 下列Harnack 型不等式成立:

$$\frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2 \leq [(8 - \frac{2}{m})\lambda - 4\xi] \max_{z \in V} f^2(z).$$

由定理3.2.6中的Harnack 型不等式, 我们可以得到如下特征值的下界估计。这一下界估计与文章[4]中的结论类似, 并且对我们得到定理3.2.3中的对数Sobolev常数的下界估计非常有用。

定理3.2.7 令 G 是一个齐性图且满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, 设 λ 是 G 上的拉普拉斯算子 $\mathcal{L}$ 的非零特征值, 那么, 我们有

$$\lambda \geq \frac{1 + 4\xi k D^2}{k(8 - \frac{2}{m})D^2},$$

这里 D 是图 G 的直径。

3.2.2 定理3.2.2的证明

在这一节, 由引理3.2.5, 我们给出定理3.2.2的证明. 证明思路来源于文章[5]中的定理6.

证明. 首先令

$$\rho(x) = \frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2.$$

由引理3.2.5, 我们得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\rho(x) &= \frac{1}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} \{[f(x) - f(ax)]^2 - [f(bx) - f(abx)]^2\} \\ &= \frac{2}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(bax)][f(x) - f(ax)] \\ &\quad + \frac{2}{k^2} \sum_{a \in K} [\sum_{b \in K} (f(abx) - f(bax))][f(x) - f(ax)] \\ &\quad - \frac{1}{k^2} \sum_{b \in K} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax) - f(bx) + f(bax)]^2 \\ &\leq X - \frac{4}{m} (\mathcal{L}f(x))^2 - 2\xi \rho(x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

这里 X 代表第二个等式中的第一项。由引理3.2.1, 得

$$\begin{aligned} X &= \frac{2}{k} \sum_{a \in K} \left\{ \frac{1}{k} \sum_{b \in K} [f(x) - f(bx)] - \frac{1}{k} \sum_{b \in K} [f(ax) - f(bax)] \right\} [f(x) - f(ax)] \\ &= \frac{2\beta}{k} \sum_{a \in K} [f(x) \log f^2(x) - f(ax) \log f^2(ax)][f(x) - f(ax)]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

与文章[5]中定理6中的证明类似, 对任意 $\sigma \geq 2$, 我们有

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}(\sigma\beta f^2(x) \log f^2(x)) + X \\
&= \frac{\sigma\beta}{k} \sum_{a \in K} [f^2(x) \log f^2(x) - f^2(ax) \log f^2(ax)] + X \\
&= 2\sigma\beta^2 f^2(x) \log^2 f^2(x) \\
&\quad - \frac{(\sigma-2)\beta}{k} \sum_{a \in K} [f(x) \log f^2(x) - f(ax) \log f^2(ax)][f(x) - f(ax)] \\
&\quad + \frac{\sigma\beta}{k} \sum_{a \in K} f(x)f(ax)[\log f^2(x) - \log f^2(ax)] \\
&\leq 2\sigma\beta^2 f^2(x) \log f^2(x)(1 + \log f^2(x)) \\
&\quad - \frac{(\sigma-2)\beta}{k} \sum_{a \in K} [f(x) \log f^2(x) - f(ax) \log f^2(ax)][f(x) - f(ax)] \\
&\leq 2\sigma\beta^2 f^2(x) \log f^2(x)(1 + \log f^2(x)) \\
&\quad - (\sigma-2)\beta^4 f^2(x) |\log^3 f^2(x)| - 2(\sigma-2)\beta\rho(x) - 2(\sigma-2)\beta\rho(x) \\
&\leq 2\sigma\beta^2 f^2(x) \log f^2(x)(1 + \log f^2(x)). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

因此, 由(3.1), (3.2), (3.3) 和引理3.2.1, 我们得

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}(\rho(x) + \sigma\beta f^2(x) \log f^2(x)) \\
&\leq -\frac{4}{m}(\mathcal{L}f(x))^2 - 2\xi\rho(x) + \mathcal{L}(\sigma\beta f^2(x) \log f^2(x)) + X \\
&\leq 2\sigma\beta^2 f^2(x) \log f^2(x)(1 + \log f^2(x)) - \frac{4}{m}\beta^2 f^2(x) \log^2 f^2(x) \\
&\quad - 2(\sigma\beta - 2\beta + \xi)\rho(x).
\end{aligned}$$

现在, 在所有节点 $x \in V$ 中, 我们选择节点 v , 使得 $\rho(x) + \sigma\beta f^2(x) \log f^2(x)$ 在节点 v 处取得最大值。因此, 我们有

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathcal{L}(\rho(v) + \sigma\beta f^2(v) \log f^2(v)) \\
&\leq 2\sigma\beta^2 f^2(v) \log f^2(v)(1 + \log f^2(v)) - \frac{4}{m}\beta^2 f^2(v) \log^2 f^2(v) \\
&\quad - 2(\sigma\beta - 2\beta + \xi)\rho(v).
\end{aligned}$$

取 $\xi = s\beta$ and $s > 0$, 得

$$\rho(v) \leq \frac{2\sigma\beta f^2(v) \log f^2(v)(1 + \log f^2(v)) - \frac{4}{m}\beta f^2(v) \log^2 f^2(v)}{2(\sigma + s - 2)}.$$

因此, 对每一个 $x \in V$ 和任意的 $\sigma \geq 2$, 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2 + \sigma\beta f^2(x) \log f^2(x) \\ & \leq \rho(v) + \sigma\beta f^2(v) \log f^2(v) \\ & \leq \left(\frac{\sigma\beta}{\sigma + s - 2} + \sigma\beta \right) \cdot f^2(v) \log f^2(v)(1 + \log f^2(v)) - \frac{2\beta}{m(\sigma + s - 2)} \cdot f^2(v) \log^2 f^2(v) \\ & \leq \frac{\sigma\beta(\sigma + s - 1)}{\sigma + s - 2} \cdot f^2(v) \log f^2(v)(1 + \log f^2(v)) - \frac{2\beta}{m(\sigma + s - 2)} \cdot f^2(v) \log^2 f^2(v) \\ & = \frac{\sigma\beta(\sigma + s - 1)}{\sigma + s - 2} \cdot f^2(v) \log f^2(v) \cdot \left[1 + \left(1 - \frac{2}{m\sigma(\sigma + s - 1)} \right) \log f^2(v) \right]. \end{aligned}$$

我们考虑下面的情形:

1. 当 $|f(x)| \geq 1$ 时, 我们可以丢掉 $\sigma\beta f^2(x) \log f^2(x)$ 这一项, 得

$$\sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2 \leq \frac{k\sigma\beta(\sigma + s - 1)}{\sigma + s - 2} \cdot f^2(v) \log f^2(v) \cdot \left[1 + \left(1 - \frac{2}{m\sigma(\sigma + s - 1)} \right) \log f^2(v) \right].$$

2. 当 $|f(x)| < 1$ 且 $f(x) \neq 0$ 时, 易知 $-f^2(x) \log f^2(x) \leq e^{-1} < 1$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2 & \leq \frac{k\sigma\beta(\sigma + s - 1)}{\sigma + s - 2} f^2(v) \log f^2(v) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{m\sigma(\sigma + s - 1)} \right) \log f^2(v) \right] \\ & \quad + k\sigma\beta. \end{aligned}$$

(3.4)

由于 $\sigma \geq 2$, $m \geq 1$, $s > 0$, 我们得 $0 < \frac{2}{m\sigma(\sigma-1+s)} < 1$. 因此, 对于 $U = \sup_x |f(x)| \geq 1$, 我们得

$$\sum_{a \in K} [f(x) - f(ax)]^2 \leq \frac{2k\sigma\beta(\sigma + s - 1)}{\sigma + s - 2} \cdot \max\{U^2 \log U^2 \left[1 + \left(1 - \frac{2}{m\sigma(\sigma + s - 1)} \right) \log U^2 \right], 1\}.$$

□

3.3 具有正的Ricci曲率的一般图上的对数Harnack 不等式和借助于特征值下界估计的对数Sobolev 常数估计

在这一节, 借鉴文章[4]中的方法, 假设图 G 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, 我们在一般图上建立了对数Harnack不等式, 并且借助于图上特征值的下界估计, 我们得到对数Sobolev常数的下界。

3.3.1 引理和主要定理

由[4], 我们有下面引理:

引理3.3.1 设 G 是有限连通图且满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, 那么对任意 $x \in V$ 和 $f \in V^R$, 我们有

$$-\frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} \frac{1}{d_y} \sum_{z \sim y} [f(x) - 2f(y) + f(z)]^2 \leq (2 - \frac{4}{m})(\mathcal{L}f(x))^2 - (2 + 2\xi)\rho(x).$$

在本节, 如[5], 我们定义图 G 上的Sobolev 常数 β 如下

$$\beta = \inf_{f \neq 0} \frac{\sum_{y \sim x} (f(x) - f(y))^2}{\sum_x f^2(x) d_x \log f^2(x)},$$

这里 f 满足 $\sum_x f^2(x) d_x = \sum_x d_x = \text{vol}G$. 由文章[5]中定理5, 我们对一般图得到下列引理:

引理3.3.2 对一般图 G , 设 $f : V \rightarrow R$ 达到Sobolev常数且 $\sum_x f^2(x) d_x = \text{vol}G$, 那么对于任意节点 x , f 满足 $\mathcal{L}f(x) = \beta f(x) \log f^2(x)$.

在本节, 我们首先令所研究的一般图都是连通且具有正的Ricci曲率的有限图, 亦即, $\xi > 0$. 由引理3.3.1 和引理3.3.2, 我们的主要结论如下:

定理3.3.3 设一般图 G 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, $f \in V^R$ 满足 $\mathcal{L}f(x) = \beta f(x) \log f^2(x)$. 那么, 对于 $U = \sup_x |f(x)| \geq 1$, $x \in V(G)$, 下列不等式成立

$$\frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} [f(x) - f(y)]^2 \leq \frac{2\beta^2 + 2\xi\beta}{\xi} \max\{U^2 \log U^2 [1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2], 1\}. \quad (3.5)$$

在(3.5)中取 $\xi = w\beta$, 这里 $w > 0$ 是一个常数, 我们得

$$\sum_{y \sim x} [f(x) - f(y)]^2 \leq \frac{2\beta d(1+w)}{w} \max\{U^2 \log U^2 [1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2], 1\}, \quad (3.6)$$

这里 d 图 G 的所有顶点的度最大值.

作为定理3.3.3的应用, 由不等式(3.5)和(3.6), 我们有下列定理.

定理3.3.4 设一般图 G 满足曲率-维数不等式 $CD(m, \xi)$, $f \in V^R$ 满足 $\mathcal{L}f(x) = \beta f(x) \log f^2(x)$. 那么, 对于 $U = \sup_x |f(x)| \geq 1$, 图 G 的Sobolev 常数 β 满足

$$\beta \geq \min\left(\frac{1 + 4\xi d D^2}{8d(4 - \frac{1}{m})D^2}, \frac{1}{8D^2 d(1 + \frac{1}{w}) \log U^2 [1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2]}\right),$$

这里 d 是最大度且 D 是 G 的直径.

定理3.3.5 设图 G 的等周维数为 δ 且满足曲率-维数不等式 $CD(m, w\beta)$. 令 f 达到Sobolev 常数 β 且 $\sup_x f(x) = U$. 那么, 我们有

$$\beta \geq \frac{w}{2d(1 + w)(4\text{vol}G)^{\frac{2}{\delta}}},$$

或

$$\log U^2 (1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2) \leq 2\delta \log \delta [1 + (2 - \frac{2}{m}) \delta \log \delta].$$

结合定理3.3.4 和定理3.3.5, 我们有下列定理

定理3.3.6 设 G 的等周维数为 δ 且满足曲率-维数不等式 $CD(m, w\beta)$. 令 f 达到Sobolev 常数 β 且 $\sup_x f(x) = U$. 那么图 G 的Sobolev 常数 β 满足

$$\beta \geq \min\left(\frac{c_0}{(\text{vol}G)^{\frac{2}{\delta}}}, \frac{1}{16D^2 d(1 + \frac{1}{w}) \delta \log \delta [1 + (2 - \frac{2}{m}) \delta \log \delta]}\right),$$

这里 c_0 仅与 δ, w, m, d , 和 D 有关.

3.3.2 定理的证明

由引理3.3.1 和引理3.3.2, 我们可以证明定理3.3.3. 证明的思路来源于[4] 和[5].

定理3.3.3的证明. 我们令

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} [f(x) - f(y)]^2 + 2\beta f^2(x) \log f^2(x) \\ &= \rho(x) + 2\beta f^2(x) \log f^2(x). \end{aligned}$$

那么, 根据文章[4]中引理2.1的证明, 由引理3.3.1和引理3.3.2, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\rho(x) &= -\frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} \frac{1}{d_y} \sum_{z \sim y} [f(x) - 2f(y) + f(z)]^2 \\
&\quad + \frac{2}{d_x} \sum_{y \sim x} \frac{1}{d_y} \sum_{z \sim y} [f(x) - f(y) + f(z) - f(y)] \cdot [f(x) - f(y)] \\
&\leq (2 - \frac{4}{m})(\mathcal{L}f(x))^2 - (2 + 2\xi)\rho(x) + 2\rho(x) + \frac{2}{d_x} \sum_{y \sim x} [f(x) - f(y)] \cdot \frac{1}{d_y} \sum_{z \sim y} [f(z) - f(y)] \\
&\leq (2 - \frac{4}{m})(\mathcal{L}f(x))^2 - 2\xi\rho(x) + \frac{2}{d_x} \sum_{y \sim x} [f(x) - f(y)] \cdot (-\mathcal{L}f(y)) \\
&= (2 - \frac{4}{m})(\mathcal{L}f(x))^2 - 2\xi\rho(x) + \frac{2}{d_x} \sum_{y \sim x} [f(x) - f(y)] \cdot (-\mathcal{L}f(y) + \mathcal{L}f(x) - \mathcal{L}f(x)) \\
&= -\frac{4}{m}(\mathcal{L}f(x))^2 - 2\xi\rho(x) + \frac{2}{d_x} \sum_{y \sim x} [f(x) - f(y)] \cdot (\mathcal{L}f(x) - \mathcal{L}f(y)) \\
&= -\frac{4}{m}(\mathcal{L}f(x))^2 - 2\xi\rho(x) + \frac{2\beta}{d_x} \sum_{y \sim x} [f(x) \log f^2(x) - f(y) \log f^2(y)][f(x) - f(y)].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

另一方面, 根据文章[5]中定理6的证明, 我们有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(f^2(x) \log f^2(x)) \\
&= \frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} [f^2(x) \log f^2(x) - f^2(y) \log f^2(y)] \\
&= \frac{2}{d_x} \sum_{y \sim x} f(x)[f(x) - f(y)] \log f^2(x) \\
&\quad - \frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} [f^2(x) \log f^2(x) - f^2(y) \log f^2(y)](f(x) - f(y)) \\
&\quad + \frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} f(x)f(y)[\log f^2(x) - \log f^2(y)] \\
&= 2\beta f^2(x) \log^2 f^2(x) \\
&\quad - \frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} [f^2(x) \log f^2(x) - f^2(y) \log f^2(y)](f(x) - f(y)) \\
&\quad + \frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} f(x)f(y)[\log f^2(x) - \log f^2(y)].
\end{aligned} \tag{3.8}$$

求最大值

$$\sum_{i=1}^k ab_i(\log a^2 - \log b_i^2)$$

限定条件为

$$\sum_{i=1}^k b_i = ka - \beta ka \log a^2,$$

这里 $k = d_x$, 我们可以用Lagrange方法得, 当 $b_1 = b_2 = \dots = b_k$ 时, $\sum_{i=1}^k ab_i(\log a^2 - \log b_i^2)$ 取得最大值. 所以, 我们得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} f(x)f(y)[\log f^2(x) - \log f^2(y)] \\ & \leq \frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} f(x)[f(x) - \beta f(x) \log f^2(x)][\log f^2(x) - \log(f(x) - \beta f(x) \log f^2(x))^2] \\ & \leq 2\beta f^2(x) \log f^2(x). \end{aligned} \quad (3.9)$$

因此, 由(3.7), (3.8), 和(3.9), 我们有

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\rho(x) + 2\beta f^2(x) \log f^2(x)) \\ & \leq -\frac{4}{m}(\mathcal{L}f(x))^2 - 2\xi\rho(x) + 4\beta^2 f^2(x) \log f^2(x)(1 + \log f^2(x)) \\ & = -\frac{4}{m} \cdot \beta^2 f^2(x) \log^2 f^2(x) - 2\xi\rho(x) + 4\beta^2 f^2(x) \log f^2(x)(1 + \log f^2(x)). \end{aligned}$$

因为 G 是有限图, 存在 G 的一个顶点 v , 使得 $\rho(x) + 2\beta f^2(x) \log f^2(x)$ 在 v 处取得最大值. 因此, 我们有

$$\begin{aligned} 0 & \leq \mathcal{L}(\rho(v) + 2\beta f^2(v) \log f^2(v)) \\ & \leq 4\beta^2 f^2(v) \log f^2(v)(1 + \log f^2(v)) - \frac{4}{m}\beta^2 f^2(v) \log^2 f^2(v) - 2\xi\rho(v) \\ & = 4\beta^2 f^2(v) \log f^2(v) + 4\beta^2(1 - \frac{1}{m})f^2(v) \log^2 f^2(v) - 2\xi\rho(v). \end{aligned} \quad (3.10)$$

所以, 有

$$\rho(v) \leq \frac{2\beta^2 f^2(v) \log f^2(v) + 2\beta^2(1 - \frac{1}{m})f^2(v) \log^2 f^2(v)}{\xi}.$$

因此, 对每一个 $x \in V$, 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} [f(x) - f(y)]^2 + 2\beta f^2(x) \log f^2(x) \\ & \leq \rho(v) + 2\beta f^2(v) \log f^2(v) \\ & = \frac{2\beta^2 + 2\xi\beta}{\xi} f^2(v) \log f^2(v) \left[1 + \frac{\beta}{\beta + \xi} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \log f^2(v)\right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

由于 $m > 1$, $\xi > 0$ 和 $\beta > 0$, 对于 $U = \sup_x |f(x)| \geq 1$, 我们有

$$\frac{1}{d_x} \sum_{y \sim x} [f(x) - f(y)]^2 \leq \frac{2\beta^2 + 2\xi\beta}{\xi} \max\{U^2 \log U^2 [1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2], 1\}.$$

证毕. $\square$

定理3.3.4的证明. 我们考虑两种情况:

1. $\sup_x |f(x) - 1| \leq \frac{1}{2}$. 由[4], 我们有 $\lambda_1 \geq \frac{1+4\xi d D^2}{d(8-\frac{2}{m} \cdot D^2)}$. 因此, 我们得

$$\beta \geq \frac{\lambda_1}{4} \geq \frac{1 + 4\xi d D^2}{8d \cdot (4 - \frac{1}{m} \cdot D^2)}.$$

2. $\sup_x |f(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$. 由于 $\sum_v f^2(v) d_x = \text{vol} G$, 取 $f(x_0) = c$ 和 $f(x_s) = 1$. 令 P 为连接 $x_0, \dots, x_s$ 的最短路径, 这里 $f(x_0) = \sup_x f(x)$. 当 $U^2 \log U^2 [1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2] \geq 1$ 时, 因为 $s \leq D$, 由(3.3.2) 我们得

$$\sum_{i=0}^{s-1} (f(x_i) - f(x_{i+1}))^2 \leq \frac{2\beta d D (1+w)}{w} \cdot U^2 \log U^2 [1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2].$$

另一方面,

$$\sum_{i=0}^{s-1} (f(x_i) - f(x_{i+1}))^2 \geq \frac{U^2}{4D}.$$

因此, 我们得

$$\beta \geq \frac{1}{8D^2 d (1 + \frac{1}{w}) \log U^2 [1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2]}.$$

当 $U^2 \log U^2 [1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2] \leq 1$ 时, 我们很容易得到

$$\beta \geq \frac{1}{8D^2 d (1 + \frac{1}{w})}.$$

证毕□

定理3.3.5的证明. 我们令 P 连接顶点 $x_0, \dots, x_s$ 的最短路径, 这里 $f(x_0) = U$ 且 $f(x_s) \leq 1$. 为取得 U 的上界, 我们考虑球 $B_r = \{y : d(x_0, y) \leq r\}$. 取

$$s = \lfloor \frac{1}{2\sqrt{\frac{2\beta d(1+w)}{w} \log U^2 [1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2]}} \rfloor.$$

由文章[5]中(21), 我们有

$$\beta^{\frac{\delta}{2}} \text{vol} G \geq \frac{U^2}{4c[\frac{2d(1+w)}{w} \log U^2 (1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2)]^{\frac{\delta}{2}}}.$$

我们考虑下面两种情况:

1. 当 $\frac{U^2}{[\log U^2 (1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2)]^{\frac{\delta}{2}}} \geq 1$ 时, 我们有

$$\beta \geq \frac{w}{2d(1+w)(4c \text{vol} G)^{\frac{2}{\delta}}}.$$

2. 当 $\frac{U^2}{[\log U^2 (1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2)]^{\frac{\delta}{2}}} < 1$ 时, 亦即,

$$\log U^2 (1 + (1 - \frac{1}{m}) \log U^2) \leq 2\delta \log \delta [1 + (2 - \frac{2}{m})\delta \log \delta].$$

证毕. □

3.4 图上的Li-Yau不等式及特征值估计

3.4.1 引言

在1986年, Li 和Yau 在文[10] 证明了热方程正解的梯度估计不等式, 如下列定理:

Theorem A ([10]) 令 M 表示不含边界的完备流形. 设 $u(x, t)$ 为在 $M \times (0, T]$ 上的下列热方程的正解

$$(\Delta - \frac{\partial}{\partial t} - q)u = 0. \quad (3.12)$$

假设 M 的Ricci 曲率下界为 $-K$, 这里 $K \geq 0$ 是一个常数. 我们假设存在一点 $p \in M$, 常数 θ , 函数 $\gamma(r, t)$ 使得在 $M \times (0, T]$ 上有 $|\nabla q|(x, t) \leq \gamma(r(t), t)$ 且 $\Delta q \leq \theta$, 这里 $r(x)$ 代表 p 到 x 的距离, 那么有

(i) 如果 $K=0$ 且 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\gamma(r, t)}{r} \leq \tau(t)$, 那么, 对所有 $\alpha > l$

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \frac{u_t}{u} - q \leq \frac{n}{2}t^{-1} + C\tau^{3/2}(t) + (\frac{n}{2}\theta)^{1/2}.$$

(ii) 如果对一些 $\gamma_0(t)$ 有 $\gamma(r, t) \leq \gamma_0(t)$, 那么

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \frac{\alpha u_t}{u} - \alpha q \leq \frac{n}{2}\alpha^2 t^{-1} + C[\tau^{3/2}(t) + (\alpha - 1)^{-1}K + \theta^{1/2}].$$

有关Li-Yau 不等式相关的结论, 我们可以查阅[3, 12–15] 和这些文献里面引用的文章.

事实上, 对具有非负曲率流形上的Laplacian 算子, 参数 α 可以被关于 t 的函数 $\alpha(t)$ 代替, 例如

Theorem B ([16, 17]) 令 M 为 n 维的完备流形. 设 $\text{Ricci}(M) \geq -K$, $K \geq 0$. 对任意热方程 $\partial_t u = \Delta u$ 的正解 u 和 $t > 0$, 我们有,

$$|\nabla \log u|^2 - (1 + \frac{2}{3}Kt)(\log u)_t \leq \frac{n}{2t} + \frac{nK}{2}(1 + \frac{1}{3}Kt), \quad (3.13)$$

$$|\nabla \log u|^2 - (1 + \frac{\sinh(Kt) \cosh(Kt) - Kt}{\sinh^2(Kt)})(\log u)_t \leq \frac{nK}{2}(1 + \cosh(Kt)). \quad (3.14)$$

现在, 我们在图上考虑上述不等式. 图 G 上的 μ -Laplacian 算子 $\Delta : \mathbb{R}^{|V|} \rightarrow \mathbb{R}^{|V|}$ 定义为:

$$\Delta f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \omega_{xy} [f(y) - f(x)].$$

为了计算方便, 如文[2]中, 我们令 $\widetilde{\sum_{y \sim x} h(y)} := \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \omega_{xy} h(y)$.

对于 μ -Laplacian Δ , 设 $\omega_{\min} := \inf_{e \in E} \omega_e > 0$, $D_\omega := \max_{y \sim x} \frac{\deg(x)}{\omega_{xy}} < \infty$, $D_\mu := \max_{x \in V} \frac{\deg(x)}{\mu_x} < \infty$.

众所周知, 链式法则求导在离散空间上是失效的, 因此, 在很长一段时间, 在图上建立Li-Yau不等式很困难. 近期, Yong Lin和Yau 等在文[2]中成功的解决了这个难题, 他们克服了链式法则求导在离散空间上失效的难题, 引

入了指数曲率-维数不等式 $CDE(n, -K)$, 并且由在图上建立的Li-Yau不等式, 证明了图上最小特征值的一个上界估计。但是, 在他们的证明中, 部分方程中仍然使用了链式法则对 t 求导, 如文[2]中方程(4.13), (4.23), (4.24)等。

在本节, 我们得到了引理3.4.4, 从而在证明过程中完全避免了链式法则求导, 得到了改进的Li-Yau不等式。另外, 我们得到定理B的离散形式, 得到形如(3.13) 和(3.14)的不等式。最后, 我们得到了改进的图上的Li-Yau不等式和图上最小特征值的上界估计值。

3.4.2 引理

我们首先给出一些在以后的证明中经常用到的引理。

引理3.4.1 设 G 是一个有限(或无限)图, Δ 是 G 上的Laplace 算子。令 $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(x) > 0$, 那么

$$\Delta f(x) = 2\sqrt{f(x)}\Delta\sqrt{f(x)} + 2\Gamma(\sqrt{f(x)}).$$

证明.

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \sum_{y \sim x} [f(y) - f(x)] \\ &= \sum_{y \sim x} [(\sqrt{f(y)})^2 - 2\sqrt{f(x)f(y)} + (\sqrt{f(x)})^2 + 2\sqrt{f(x)f(y)} - 2f(x)] \\ &= 2\sqrt{f(x)} \sum_{y \sim x} [\sqrt{f(y)} - \sqrt{f(x)}] + \sum_{y \sim x} [\sqrt{f(y)} - \sqrt{f(x)}]^2 \\ &= 2\sqrt{f(x)}\Delta\sqrt{f(x)} + 2\Gamma(\sqrt{f(x)}). \end{aligned}$$

□

引理3.4.2 [2] 设 G 是一个有限(或无限)图, 在顶点 x 处, $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f(x) > 0$, 且 $\Delta f(x) < 0$. 那么

$$(i) \sum_{y \sim x} f(y) < D_\mu f(x); \quad (ii) \sum_{y \sim x} f^2(y) < D_\mu D_\omega f^2(x).$$

引理3.4.3 [2] 令 G 是一个有限(或无限)图, 且函数 $g, F : V \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. 设 $g(x, t) \geq 0$, $F(x, t)$ 在 $(x^*, t^*) \in V \times [0, T]$ 处有一个局部最大值, $t^* \neq 0$. 那么

$$\mathcal{L}(gF)(x^*, t^*) \leq \mathcal{L}(g)F(x^*, t^*).$$

引理3.4.4 令 G 是一个有限(或无限)图, Δ 为 G 上的Laplace算子. 设对所有的 $x \in V$ 和 $t > 0$, $q = q(x, t)$ 满足 $\Gamma(q) \leq \eta^2$, 这里 $\eta \geq 0$ 是一个常数, 那么我们有

$$1. \ 2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u} - \Delta(qu) \geq -\eta u\sqrt{D_\mu};$$

$$2. \ q\Delta u - \Delta(qu) > -\eta u\sqrt{D_\mu D_\omega}.$$

证明. 由图 G 上Laplace算子 Δ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned} & 2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u} - \Delta(qu) \\ &= \widetilde{\sum_{y \sim x}} (\sqrt{u(y)} - \sqrt{u(x)})(q(y)\sqrt{u(y)} - q(x)\sqrt{u(x)}) + 2q(x)\sqrt{u(x)} \widetilde{\sum_{y \sim x}} (\sqrt{u(y)} - \sqrt{u(x)}) \\ & \quad - \widetilde{\sum_{y \sim x}} (q(y)u(y) - q(x)u(x)) \\ &= \widetilde{\sum_{y \sim x}} [q(y)u(y) - q(y)\sqrt{u(x)u(y)} - q(x)\sqrt{u(x)u(y)} + q(x)u(x)] \\ & \quad + \widetilde{\sum_{y \sim x}} [2q(x)\sqrt{u(x)u(y)} - 2q(x)u(x)] - \widetilde{\sum_{y \sim x}} [q(y)u(y) - q(x)u(x)] \\ &= - \widetilde{\sum_{y \sim x}} [q(y) - q(x)]\sqrt{u(y)u(x)} \\ &\geq -\sqrt{\Gamma(q)} \cdot \sqrt{\widetilde{\sum_{y \sim x}} u(y)} \cdot \sqrt{u(x)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\geq -\eta u\sqrt{D_\mu}. \tag{3.16}$$

这里, 不等式(3.14) 由Cauchy-Schwarz得出, 不等式(3.15) 由引理3.4.2得出.

用同样的方法, 我们可以证明此引理中的第二个不等式, 如下:

$$\begin{aligned}
 q\Delta u - \Delta(qu) &= q(x) \widetilde{\sum_{y \sim x}} [u(y) - u(x)] - \widetilde{\sum_{y \sim x}} [q(y)u(y) - q(x)u(x)] \\
 &= - \widetilde{\sum_{y \sim x}} [q(y) - q(x)]u(y) \\
 &\geq - \sqrt{\widetilde{\sum_{y \sim x}} [q(y) - q(x)]^2} \cdot \sqrt{\widetilde{\sum_{y \sim x}} u^2(y)} \\
 &> - \sqrt{\Gamma(q)} \cdot \sqrt{D_\mu D_\omega} u \\
 &> - \eta u \sqrt{D_\mu D_\omega}.
 \end{aligned}$$

□

3.4.3 图上的Li-Yau 不等式

首先, 我们引入算子 $\mathcal{L} = \Delta - \partial_t$. 我们的主要结论如下:

3.4.3.1 改进的文[2]中的Li-Yau 不等式

定理3.4.5 设 G 为一个有限图, $u = u(x, t)$ 是 G 上热方程 $(\mathcal{L} - q)u = 0$ 的一个正解. 令对所有的 $x \in V$ 和 $t \geq 0$, $q = q(x, t)$ 满足 $\Gamma(q) \leq \eta^2$.

1. 如果 G 满足 $CDE(n, 0)$, 那么对所有 $t > 0$

$$\frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{q}{2} \leq \frac{n}{2t} + \frac{1}{2} \sqrt{n\eta \sqrt{D_\mu D_\omega}}.$$

2. 如果 G 满足 $CDE(n, -K)$, $K \geq 0$, 令 $0 < \alpha < 1$, 那么对所有 $t > 0$

$$\frac{(1 - \alpha)\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \frac{\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{q}{2} \leq \frac{n}{2t(1 - \alpha)} + \frac{1}{2} C'(\alpha, n, K, \eta, D_\mu, D_\omega),$$

$$\text{这里 } C'(\alpha, n, K, \eta, D_\mu, D_\omega) = \sqrt{\left(\frac{nK}{\alpha}\right)^2 + n\eta \sqrt{D_\mu} + n \frac{\alpha}{1 - \alpha} \eta \sqrt{D_\mu D_\omega}}.$$

定理3.4.5 的证明与文[2]中定理4.10 的证明非常类似, 我们只需要用引理3.4.4去代替文[2]中方程(4.12), (4.13)等用链式法则求导的地方. 我们在这里不再给出具体证明。

定理3.4.6 设 G 为一个有限(或无限)图, $x_0 \in V$. 对于函数 $q(x, t)$ 满足 $\Gamma(q) \leq \eta^2$, 如果 $d(x, x_0) < 2R$, $R > 0$, 令 $u : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为热方程 $(\mathcal{L} - q)u(x, t) = 0$ 的一个正解. 如果 G 满足 $CDE(n, -K)$, $K > 0$, 那么对所有 $t > 0$, 在以 x_0 为中心 R 为半径的球内, 我们有

$$\frac{(1-\alpha)\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{q}{2} \leq \frac{n}{2t(1-\alpha)} + \frac{2nD_\mu}{R(1-\alpha)} + \frac{1}{2}C'(\alpha, n, K, \eta, D_\mu, D_\omega),$$

这里 $C'(\alpha, n, K, \eta, D_\mu, D_\omega) = \sqrt{(\frac{nK}{\alpha})^2 + n\eta\sqrt{D_\mu} + n\frac{\alpha}{1-\alpha}\eta\sqrt{D_\mu D_\omega}}$.

由定理3.4.5和文[2]中定理4.15的证明思路, 我们易证定理3.4.6, 在这里, 我们不再给出证明.

注3.4.7 (1)在上述两个定理证明中, 由引理3.4.4, 我们可以彻底避免用链式法则求导.

(2)我们可以比较定理3.4.5与文[2]中定理4.10, 定理3.4.6与文[2]中定理4.15, 易知 $\sqrt{n\psi\sqrt{D_\mu D_\omega}} < \sqrt{n(\vartheta + \eta\sqrt{2D_\mu(D_\omega + 1)})}$, $C' < C$ 等, 因此, 我们的结果比文[2]中的结果更精确.

3.4.3.2 图上定理B的离散形式

我们给定 C^1 函数 $c(t) : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, 并设 $c(t)$ 满足下列条件:

- (A1) 对任意 $t > 0$, $c(t) \geq e^{-2Kt}$, $c'(t) < 0$, 且 $\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = 1$;
- (A2) 对任意 $T > 0$, $C(t) = -\frac{c'(t)}{c(t)}$ 在区间 $[0, T]$ 上连续可积. 另外, 我们令 $\alpha(t) = -\int_0^t C(t)dt + 2Kt + 1$. 显然, $\alpha(t) > 1$.

定理3.4.8 设 G 为有限图, $u = u(x, t)$ 是图 G 上热方程 $(\mathcal{L} - q)u(x, t) = 0$ 的正解. 假设对所有的 $x \in V$ 和 $t \geq 0$, $q = q(x, t)$ 满足 $\Gamma(q) \leq \eta^2$. 如果对 $K \geq 0$, G 满足 $CDE(n, -K)$, 那么对任意 $t > 0$, 我们有

$$\frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \alpha(t)\frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha(t)q}{2} \leq \frac{D_\mu - nK + 1}{2} + \frac{nC(t)}{8} + \frac{1}{2C(t)}[\eta\sqrt{D_\mu} + (\alpha(t) - 1)\eta\sqrt{D_\mu D_\omega} + nK^2].$$

通过改进定理3.4.5的证明, 我们来证明定理3.4.8. 证明的思路来源于文章[18]和[19].

证明. 首先, 令

$$H = c(t) \cdot \left[\frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)u_t}{u} - \alpha(t)q \right]. \quad (3.17)$$

由 $u_t = \Delta u - qu$ 和引理3.4.1, 我们得

$$H = c(t) \cdot \frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)\Delta u}{u} = c(t) \cdot \frac{(1 - \alpha(t))\Delta u - 2\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}}{u}.$$

固定 T , 设在区域 $V \times [0, T]$ 内 H 在 (x^*, t^*) 处取得最大值, 而且我们可以设 $H(x^*, t^*) > 0$, 进而, $t^* > 0$ 且 $\Delta\sqrt{u}(x^*, t^*) < 0$. 以下所有的计算都认为是点 (x^*, t^*) 处进行的. 由引理3.4.3, 取 $H = u$, 我们得

$$\begin{aligned} c(t^*)[(1 - \alpha(t^*))q\Delta u - 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}] &= quH = \mathcal{L}(u)H \\ &\geq \mathcal{L}(uH) \\ &= -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)[2\Delta\Gamma(\sqrt{u}) - 4\Gamma(\sqrt{u}, \frac{\partial}{\partial t}(u)) + \alpha'(t^*)\Delta u - \alpha(t^*)\Delta\mathcal{L}(u)] \\ &= -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)[4\tilde{\Gamma}_2(\sqrt{u}) + 2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + \alpha'(t^*)\Delta u - \alpha(t^*)\Delta qu]. \end{aligned}$$

整理上式, 得

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)[4\tilde{\Gamma}_2(\sqrt{u})] \\ &\quad + c(t^*)[2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + \alpha'(t^*)\Delta u - \alpha(t^*)\Delta qu + (\alpha(t^*) - 1)q\Delta u + 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}] \\ &= -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)[4\tilde{\Gamma}_2(\sqrt{u}) + \alpha'(t^*)\Delta u] \\ &\quad + c(t^*)[2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u} - \Delta qu] + c(t^*)(\alpha(t^*) - 1)(q\Delta u - \Delta qu) \\ &\geq -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)[4\tilde{\Gamma}_2(\sqrt{u}) + \alpha'(t^*)\Delta u] + c(t^*)[-\eta u\sqrt{D_\mu} - (\alpha(t^*) - 1)\eta u\sqrt{D_\mu D_\omega}]. \end{aligned} \tag{3.18}$$

取

$$\varphi = \frac{nc'}{2c} + nK. \tag{3.19}$$

由(3.18), (3.19) 并利用 $CDE(n, -K)$ 不等式, 我们得

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)\left[\frac{4u}{n}\left(\frac{\Delta u - 2\Gamma(\sqrt{u})}{2u}\right)^2 - 4K\Gamma(\sqrt{u}) + \alpha'(t^*)\Delta u\right] \\
&\quad + c(t^*)[-\eta u\sqrt{D_\mu} - (\alpha(t^*) - 1)\eta u\sqrt{D_\mu D_\omega}] \\
&\geq -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)\left[-\frac{2\varphi}{n}(\Delta u - 2\Gamma(\sqrt{u})) - \frac{u\varphi^2}{n} - 4K\Gamma(\sqrt{u}) + \alpha'(t^*)\Delta u\right] \\
&\quad + c(t^*)[-\eta u\sqrt{D_\mu} - (\alpha(t^*) - 1)\eta u\sqrt{D_\mu D_\omega}] \\
&= -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)\left(\alpha'(t^*) - \frac{2\varphi}{n}\right)\Delta u + c(t^*)\left(\frac{4\varphi}{n} - 4K\right)\Gamma(\sqrt{u}) - \frac{c(t^*)\varphi^2}{n}u \\
&\quad + c(t^*)[-\eta u\sqrt{D_\mu} - (\alpha(t^*) - 1)\eta u\sqrt{D_\mu D_\omega}]. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

我们可以验证

$$c(t^*)\left(\alpha'(t^*) - \frac{2\varphi}{n}\right) = 0; \tag{3.21}$$

$$c(t^*)\left(\frac{4\varphi}{n} - 4K\right) = 2c'(t^*) < 0. \tag{3.22}$$

另外, 由引理3.4.2, 得

$$\begin{aligned}
\Gamma(\sqrt{u(x^*, t^*)}) &= \frac{1}{2} \widetilde{\sum_{y \sim x^*}} (\sqrt{u(y, t^*)} - \sqrt{u(x^*, t^*)})^2 \leq \frac{1}{2} \widetilde{\sum_{y \sim x^*}} (u(y, t^*) + u(x^*, t^*)) \\
&< \frac{D_\mu + 1}{2} u(x^*, t^*). \tag{3.23}
\end{aligned}$$

由(3.20), (3.21), (3.22) 和(3.23), 得

$$-\frac{c'(t^*)H}{c(t^*)} \leq -(D_\mu + 1)c'(t^*) + c(t^*)[\eta\sqrt{D_\mu} + (\alpha(t^*) - 1)\eta\sqrt{D_\mu D_\omega}] + \frac{c(t^*)\varphi^2}{n}. \tag{3.24}$$

由(3.19) 和(3.24), 得

$$H \leq c(t^*)(D_\mu - nK + 1) + \frac{-nc'(t^*)}{4} + \frac{c^2(t^*)}{-c'(t^*)}[\eta\sqrt{D_\mu} + (\alpha(t^*) - 1)\eta\sqrt{D_\mu D_\omega} + nK^2].$$

因为 $\frac{\partial\sqrt{u}}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{\partial u}{\partial t}$ 且 $C(t) = -\frac{c'(t)}{c(t)}$, 我们得

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \alpha(t^*)\frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha(t^*)q}{2} &\leq \frac{D_\mu - nK + 1}{2} + \frac{nC(t^*)}{8} \\
&\quad + \frac{1}{2C(t^*)}[\eta\sqrt{D_\mu} + (\alpha(t^*) - 1)\eta\sqrt{D_\mu D_\omega} + nK^2]. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

由于 T 是任意的, 我们完成了证明. $\square$

定理3.4.9 设 G 为有限(或无限) 图, 且 $x_0 \in V$. 如果 $d(x, x_0) < 2R$ ($R > 0$), 令 $u : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $(\mathcal{L} - q)u(x, t) = 0$ 的正解, 这里 $\Gamma(q) \leq \eta^2$. 此外, 如果 G 满足 $CDE(n, -K)$, $K > 0$, 那么对所有 $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \alpha(t) \frac{\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha(t)q}{2} &\leq \frac{-C}{C - D_\mu} (nK + D_\mu + 1) + \frac{2D_\mu \alpha(t)}{R} \\ &\quad + \frac{1}{C - D_\mu} [\eta \sqrt{D_\mu} + (\alpha(t) - 1) \eta \sqrt{D_\mu D_\omega} + nK^2] + \frac{nC^2}{4(C - D_\mu)}, \end{aligned}$$

这里 $C(t) = -\frac{c'}{c} > D_\mu$.

证明. 首先, 我们定义函数 $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$\phi(v) = \begin{cases} 0 & : d(v, x_0) > 2R \\ \frac{2R - d(v, x_0)}{R} & : 2R \geq d(v, x_0) \geq R \\ 1 & : R > d(v, x_0) \end{cases}$$

取

$$\begin{aligned} G &= c(t) \phi \left[\frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)u_t}{u} - \alpha(t)q \right] \\ &= c(t) \phi \left[\frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)\Delta u}{u} \right] \\ &= c(t) \phi \left[\frac{2(1 - \alpha(t))\Gamma(\sqrt{u}) - 2\alpha(t)\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}}{u} \right] \\ &= c(t) \phi \left[\frac{(1 - \alpha(t))\Delta u - 2\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}}{u} \right]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

固定 t^* , 设在区域 $V \times \{t^*\}$ 内 G 在 (x^*, t^*) 处取得最大值, 而且我们可以设 $G(x^*, t^*) > 0$, 进而, $t^* > 0$ 且 $\Delta\sqrt{u}(x^*, t^*) < 0$. 以下所有的计算都认为是在点 (x^*, t^*) 处进行的. 我们考虑下面两种情况:

情形(a). $\phi(x^*) = \frac{1}{R}$, 亦即 $d(v, x_0) = 2R - 1$. 我们有

$$\begin{aligned} G(x^*, t^*) &= c(t^*) \phi \left[\frac{2(1 - \alpha(t^*))\Gamma(\sqrt{u}) - 2\alpha(t^*)\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}}{u} (x^*, t^*) \right] \\ &\leq 2\alpha(t^*) c(t^*) \phi \frac{-\Delta\sqrt{u}(x^*, t^*)}{\sqrt{u}(x^*, t^*)}. \end{aligned}$$

由[2], 得 $\frac{-\Delta\sqrt{u}(x^*, t^*)}{\sqrt{u}(x^*, t^*)} < D_\mu$, 因此, 我们有

$$G(x, T) \leq G(x^*, t^*) \leq \frac{2D_\mu\alpha(t^*)c(t^*)}{R} \leq \frac{2D_\mu\alpha(T)c(T)}{R} \leq \frac{2D_\mu\alpha(T)}{R}.$$

情形(b). $\phi(x^*) = \frac{s}{R}$, 这里 $s \geq 2$, 即 $d(v, x_0) = 2R - s$. 以下所有的计算都认为是在点 (x^*, t^*) 处进行的. 由引理3.4.3, 令 $F = \frac{u}{\phi}$, 我们有

$$\mathcal{L}\left(\frac{u}{\phi}\right)G \geq \mathcal{L}\left(\frac{uG}{\phi}\right) = \mathcal{L}(uH),$$

这里 H 定义如(3.17).

$$\mathcal{L}(uH) = -\frac{c'(t^*)uH}{c(t^*)} + c(t^*)[(2\Delta\Gamma(\sqrt{u}) - 4\Gamma(\sqrt{u}, \frac{\partial}{\partial t}(u)) + \alpha'(t)\Delta u - \alpha(t)\Delta\mathcal{L}(u))].$$

另一方面, 当 $\phi(x^*) = \frac{s}{R}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{u}{\phi}\right) &= \widetilde{\sum_{y \sim x}} \left(\frac{u(y, t)}{\phi(y)} - \frac{u(x, t)}{\phi(x)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u(x, t)}{\phi(x)} \right) \\ &= \widetilde{\sum_{y \sim x}} \left(\frac{u(y, t)}{\phi(y)} - \frac{u(x, t)}{\phi(x)} \right) - \frac{1}{\phi(x)} (\Delta u - qu) \\ &= \widetilde{\sum_{y \sim x}} \left(\frac{u(y, t)}{\phi(y)} - \frac{u(x, t)}{\phi(x)} \right) - \frac{1}{\phi(x)} \widetilde{\sum_{y \sim x}} (u(y, t) - u(x, t)) + \frac{qu}{\phi(x)} \\ &= \widetilde{\sum_{y \sim x}} \left(\frac{1}{\phi(y)} - \frac{1}{\phi(x)} \right) u(y, t) + \frac{qu}{\phi(x)} \\ &\leq \widetilde{\sum_{y \sim x}} \left| \frac{1}{\phi(y)} - \frac{1}{\phi(x)} \right| u(y, t) + \frac{qu}{\phi(x)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

当 $\phi(x^*) = \frac{s}{R}$ 时, 对任意 $y \sim x^*$, 我们有 $\phi(y) = \frac{s \pm 1}{R}$ or $\phi(y) = \frac{s}{R}$. 总之, 我们有 $\left| \frac{1}{\phi(y)} - \frac{1}{\phi(x)} \right| \leq \frac{R}{s(s-1)} \leq \frac{1}{\phi(x^*)}$. 由引理3.4.2, 我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{u}{\phi}\right)G &\leq \frac{D_\mu u(x, t)G}{\phi} + \frac{quG}{\phi} \\ &= \frac{D_\mu u(x, t)G}{\phi} + \beta[(1 - \alpha(t))q\Delta u - 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

取 $\varphi = \frac{nc'}{2c} + nK$, 利用 $CDE(n, -K)$ 不等式, 得

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\frac{c'(t^*)uG}{c(t^*)\phi} - \frac{D_\mu uG}{\phi} + c(t)[4\tilde{\Gamma}_2(\sqrt{u}) + \alpha'(t)\Delta u] \\
&\quad + c(t)[2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u} - \Delta qu] + \beta(\alpha(t^*) - 1)(q\Delta u - \Delta qu) \\
&\geq (-\frac{c'}{c} - D_\mu) \cdot \frac{uG}{\eta} + c'(D_\mu + 1)u + c[-\eta u\sqrt{D_\mu} - (\alpha(t^*) - 1)\eta u\sqrt{D_\mu D_\omega}] - \frac{c\varphi^2}{n}u.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

整理上式, 得

$$\begin{aligned}
&(-c' - cD_\mu)\left[\frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)u_t}{u} - \alpha(t)q\right] \\
&\leq c'(nK + D_\mu + 1) + c[\eta\sqrt{D_\mu} + (\alpha(t) - 1)\eta\sqrt{D_\mu D_\omega} + nK^2] + \frac{nc'^2}{4c}. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

这里 $C(t) = -\frac{c'}{c} > D_\mu$. 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \alpha(t)\frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha(t)q}{2} &\leq \frac{-C}{C - D_\mu}(nK + D_\mu + 1) + \frac{2D_\mu\alpha(t)}{R} \\
&\quad + \frac{1}{C - D_\mu}[\eta\sqrt{D_\mu} + (\alpha(t) - 1)\eta\sqrt{D_\mu D_\omega} + nK^2] + \frac{nC^2}{4(C - D_\mu)}.
\end{aligned}$$

□

我们有下列定义:

定义3.4.10 令 (G, V) 表示一个图, 满足 $CDE(n, -K)$ 不等式, 这里 $K \geq 0$. 我们称 $\phi : V \rightarrow [0, 1]$ 是一个以 $x_0 \in V$ 为中心 (c, R) -强截断函数, 如果在集合 $S \subset V$ 上 $\phi(x_0) = 1$, 在 $x \in S$ 上 $\phi(x) = 0$, 且对任意 $x \in S$

$$1. \text{ 或者 } \phi(x) < \frac{m(1+R\sqrt{K})}{2R^2},$$

$$2. \text{ 或者 } \phi \text{ 在 } v \text{ 的小邻域内存在且 } \phi^2(x)\Delta_{\frac{1}{\phi}}(x) \leq D_\mu \frac{m(1+R\sqrt{K})}{R^2} \text{ and } \phi^3(x)\Gamma(\frac{1}{\phi})(x) \leq D_\mu \frac{m}{R^2},$$

这里 $m = m(n)$ 仅与 n 有关.

我们有下面定理:

定理3.4.11 设 $G(V, E)$ 为满足 $CDE(n, -K)$ 不等式的图, 这里 $K \geq 0$. 令 $R > 0$ 且固定 $x_0 \in V$. 设 G 在集合 $S \subset V$ 上有一个以 x_0 为中心的 (c, R) -强截断函数. 如果 $x \in S$, $q(x, t)$ 满足 $\Gamma(q) \leq \eta^2$, 令 $u: V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $(\mathcal{L} - q)u(x, t) = 0$ 的正解. 那么, 对所有 $t > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \alpha(t) \frac{\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha(t)q}{2} &\leq \frac{C}{C-A} (D_\mu - nK + 1) + \frac{m(1 + R\sqrt{K})D_\mu \alpha(T)}{R^2} \\ &\quad + \frac{1}{C-A} [\eta\sqrt{D_\mu} + (\alpha(t) - 1)\eta\sqrt{D_\mu D_\omega} + nK^2] + \frac{nC^2}{4(C-A)}, \end{aligned}$$

这里 $A = D_\mu \frac{m(1+R\sqrt{K})}{R^2} + (1 + D_\omega)\sqrt{1 + D_\mu} \sqrt{2D_\mu \frac{m}{R^2}}$, $C(t) = -\frac{c'}{c} > A$.

证明. 我们取

$$\begin{aligned} G &= c(t)\phi\left[\frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)u_t}{u} - \alpha(t)q\right] \\ &= c(t)\phi\left[\frac{2\Gamma(\sqrt{u}) - \alpha(t)\Delta u}{u}\right] \\ &= c(t)\phi\left[\frac{2(1 - \alpha(t))\Gamma(\sqrt{u}) - 2\alpha(t)\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}}{u}\right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

固定 t^* , 设在区域 $V \times \{t^*\}$ 内 G 在 (x^*, t^*) 处取得最大值, 而且我们可以设 $G(x^*, t^*) > 0$, 进而, $t^* > 0$ 且 $\Delta\sqrt{u}(x^*, t^*) < 0$. 以下所有的计算都认为是在点 (x^*, t^*) 处进行的. 我们考虑下面两种情况:

情形(a). $\phi(x^*) < \frac{m(1+R\sqrt{K})}{2R^2}$. 我们有

$$\begin{aligned} G(x^*, t^*) &= c(t^*)\phi\left[\frac{2(1 - \alpha(t^*))\Gamma(\sqrt{u}) - 2\alpha(t^*)\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}}{u}(x^*, t^*)\right] \\ &\leq 2\alpha(t^*)c(t^*)\phi\frac{-\Delta\sqrt{u}(x^*, t^*)}{\sqrt{u}(x^*, t^*)} \\ &< \frac{m(1 + R\sqrt{K})D_\mu \alpha(T)}{R^2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

情形(b). 定义3.4.10的第二条成立. 以下所有的计算都认为是在点 (x^*, t^*) 处进行的. 由定理3.4.9的证明, 我们得

$$\mathcal{L}\left(\frac{u}{\phi}\right)G \geq -\frac{c'}{c} \cdot \frac{uG}{\phi} + c[2\Delta\Gamma(\sqrt{u}) - 4\Gamma(\sqrt{u}, \frac{\partial}{\partial t}(u)) + \alpha'(t)\Delta u - \alpha(t)\Delta\mathcal{L}(u)]. \quad (3.33)$$

另一方面, 由[2]中方程(4.23), 得

$$\mathcal{L}\left(\frac{u}{\phi}\right) \leq \frac{qu}{\phi} + u\Delta\frac{1}{\phi} + 2\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)} \cdot \sqrt{\Gamma(u)}. \quad (3.34)$$

由(3.33) 和(3.34), 得

$$\begin{aligned} & c[(1 - \alpha(t))q\Delta u - 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u}] + uG\Delta\frac{1}{\phi} + 2G\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)} \cdot \sqrt{\Gamma(u)} \\ & \geq -\frac{c'}{c} \cdot \frac{uG}{\phi} + c[2\Delta\Gamma(\sqrt{u}) - 4\Gamma(\sqrt{u}, \frac{\partial_t(u)}{2\sqrt{u}}) + \alpha'(t)\Delta u - \alpha(t)\Delta\mathcal{L}(u)]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

整理上式, 得

$$\begin{aligned} & \frac{c'}{c} \cdot \frac{uG}{\phi} + uG\Delta\frac{1}{\phi} + 2G\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)} \cdot \sqrt{\Gamma(u)} \\ & \geq c[4\tilde{\Gamma}_2(\sqrt{u}) + \alpha'(t)\Delta u] \\ & \quad + c[2\Gamma(\sqrt{u}, q\sqrt{u}) + 2q\sqrt{u}\Delta\sqrt{u} - \Delta qu] + \beta(\alpha(t^*) - 1)(q\Delta u - \Delta qu) \\ & \geq c'(D_\mu + 1)u + c[-\eta u\sqrt{D_\mu} - (\alpha(t^*) - 1)\eta u\sqrt{D_\mu D_\omega}] - \frac{c\phi^2}{n}u. \end{aligned} \quad (3.36)$$

用 $\frac{c\phi^2}{u}$ 去乘上式, 由[2]中方程(4.25), (4.26), 我们得

$$\begin{aligned} & c'\phi G + cG\phi^2\Delta\frac{1}{\phi} + \beta G\sqrt{2\phi^3\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)} \cdot \sqrt{\phi\frac{2\Gamma(u)}{u^2}} \\ & \leq c'\phi G + cGD_\mu\frac{m(1 + R\sqrt{K})}{R^2} + cG(1 + D_\omega)\sqrt{2D_\mu\frac{m}{R^2}} \cdot \sqrt{\phi\frac{2\Gamma(\sqrt{u})}{u}} \\ & \leq c'G + cGD_\mu\frac{m(1 + R\sqrt{K})}{R^2} + cG(1 + D_\omega)\sqrt{1 + D_\mu}\sqrt{2D_\mu\frac{m}{R^2}} \\ & = (c' + cA)G, \end{aligned} \quad (3.37)$$

这里 $A = D_\mu\frac{m(1+R\sqrt{K})}{R^2} + (1 + D_\omega)\sqrt{1 + D_\mu}\sqrt{2D_\mu\frac{m}{R^2}}$.

当 $C(t) = -\frac{c'}{c} > A$ 时, 由(3.36), (3.37)和(3.32), 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - \alpha(t)\frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{\alpha(t)q}{2} & \leq \frac{C}{C - A}(D_\mu - nK + 1) + \frac{m(1 + R\sqrt{K})D_\mu\alpha(T)}{R^2} \\ & \quad + \frac{1}{C - A}[\eta\sqrt{D_\mu} + (\alpha(t) - 1)\eta\sqrt{D_\mu D_\omega} + nK^2] + \frac{nC^2}{4(C - A)}. \end{aligned}$$

□

例3.4.12 由定理3.4.8, 定理3.4.9和定理3.4.11, 根据满足条件(A1)和(A2)的不同的 $c(t)$, 我们给出一些例子.

(1) 取 $c(t) = e^{-Kt}$. 由定理3.4.8, 我们得

$$\frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - (1 + Kt)\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{q}{2}\right) \leq C_1 + C_2 t, \quad (3.38)$$

这里 $C_1 = \frac{D_\mu+1}{2} + \frac{nK}{8} + \frac{\eta\sqrt{D_\mu}}{2K}$, $C_2 = \frac{\eta\sqrt{D_\mu D_\omega}}{2}$. 由定理3.4.9和定理3.4.11, 我们仍然可以得到不等式(3.38), 但这里 C_1 和 C_2 有变化.

(2) 取 $c(t) = e^{\sinh^{-1}(Kt)}$, 易知 $c'(t) < 0$, $C(t) = K \sinh^{-2}(Kt) \cosh(Kt)$. 由定理3.4.8, 我们得

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\sqrt{u})}{u} - (1 + 2Kt + \sinh^{-1}(Kt))\left(\frac{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{q}{2}\right) \\ & \leq \frac{D_\mu+1}{2} + \left(\frac{\coth(Kt)\operatorname{csch}(Kt)}{8} + \frac{\tanh(Kt)\operatorname{sech}(Kt)}{2} - 1\right)nK \\ & \quad + \frac{\tanh(Kt)\operatorname{sech}(Kt)}{2K}[\eta\sqrt{D_\mu} + (2Kt + \sinh^{-1}(Kt))\eta\sqrt{D_\mu D_\omega}]. \end{aligned}$$

由定理3.4.9和定理3.4.11, 我们可得类似结果.

3.4.4 Harnack 不等式与特征值估计

首先, 将文[18]中引理5.1和文[2]中引理5.3的证明结合在一块, 我们可得下列引理:

引理3.4.13 对任意 $\alpha(t) > 0$ 和函数 $\chi, q_1, q_2 : [T_1, T_2] \rightarrow \mathcal{R}$, 我们有

$$\begin{aligned} & \min_{s \in [T_1, T_2]} \chi(s) - \frac{1}{\alpha(t)} \int_s^{T_2} \chi^2(t) dt + \int_{T_1}^s q_1(t) dt + \int_s^{T_2} q_2(t) dt \\ & \leq \frac{2 \int_{T_1}^{T_2} ds \int_{T_1}^s \alpha(u) du}{(T_2 - T_1)^3} + \int_{T_1}^{T_2} [q_2(t) \int_{T_1}^t \phi(s) ds + q_1(t) \int_t^{T_2} \phi(s) ds] dt, \end{aligned}$$

这里 $\phi(s) = 2 \int_{T_1}^s \frac{1}{\alpha(t)} dt$.

由上述引理, 且根据文[18]中定理5.2和文[2]中定理5.1的证明, 我们得下面Harnack不等式:

定理3.4.14 设 $G = (V, E)$ 为一个图, 对于 $x_0 \in V$, 且 $x \in B(x_0, R)$, $R \geq 0$, 函数 $\alpha(t) > 1, \chi$, 有 $f : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\frac{\Gamma(f)}{f^2}(x, t) - \alpha(t) \frac{\frac{\partial}{\partial t} f}{f}(x, t) - \alpha(t) q(x, t) \leq \chi(t).$$

那么, 对于 $T_1 < T_2$ 且 $x, y \in V$, 我们有

$$f(x, T_1) \leq f(y, T_2) \cdot \exp\left(\int_{T_1}^{T_2} \frac{\chi(t)}{\alpha(t)} dt\right) + \varrho_{q, x_0, R, \mu_{\max}, \omega_{\min}}(x_1, x_2, T_1, T_2),$$

这里

$$\begin{aligned} \varrho_{q, x_0, R, \mu_{\max}, \omega_{\min}}(x_1, x_2, T_1, T_2) = \inf \{ & \sum_{i=0}^{k-1} \frac{4\mu_{\max} k^3}{\omega_{\min}(T_2 - T_1)^3} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds \int_{t_i}^s \alpha(u) du \\ & + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} [q(x_{i+1}, t) \int_{t_i}^t \phi(s) ds + q(x_i, t) \int_t^{t_{i+1}} \phi(s) ds] dt \right) \}. \end{aligned}$$

由上述Harnack不等式, 结合文[2]中7.2部分, 我们可得有限图 G 上的最小特征值的一个上界估计。

定理3.4.15 设 $G = (V, E)$ 为一个有限图, 满足 $CDE(n, -K)$ 不等式, 且 $K > 0$. 令 $0 < \alpha < 1$, 我们有

$$\lambda_1 \leq \max\{C\sqrt{K}h, C^2h^2\},$$

这里 C 仅与 n 和 $\mu_{\max}$ 有关。

第四章 基于谱半径的超图分类研究

如第一章绪论所述, Smith等人根据谱半径已经对一般图进行了分类。在这一章, 我们将根据不同的谱半径对超图进行分类。我们所用的方法与Smith等人的方法不同, 如第二章中所述, 主要是利用 α -正规, α -次正规, α -超正规的理论以及MATLAB、MAPLE程序对超图进行分类, 并且我们的方法仍然可以解决Smith等人对一般图分类的问题而得到相同的结果, 但我们的方法更加简洁、灵活。

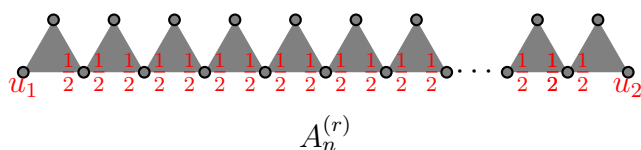
4.1 对谱半径至多为2的超图的完全分类研究

4.1.1 引理

令 $\rho_r := (r-1)! \sqrt[r]{4}$. 我们首先可以证明 ρ_r 是一条无限路径 $A_n^{(r)}$ 的谱半径的极限点。

引理4.1.1 设 $A_n^{(r)}$ 是一条有 n 条边的 r -一致超图路径, 其谱半径为 $\rho(A_n^{(r)})$, 令 $\rho_r = (r-1)!\sqrt[r]{4}$. 那么, 对于任意的 $r \geq 2$, 我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n^{(r)}) = \rho_r$.

证明. 我们首先证明 $\rho(A_n^{(r)}) < \rho_r$. 对 $A_n^{(r)}$ 进行标号如下:

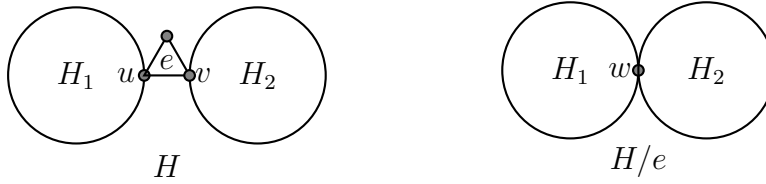


我们容易验证这是一个严格的 $\frac{1}{4}$ -次正规标号, 所以, $\rho(A_n^{(r)}) < \rho_r$. 另一方面, 由在(??)中 $\rho(H)$ 的定义, 选取

$$x_v^* = \begin{cases} 1 & v \text{ 是叶节点, } v \neq u_1, u_2; \\ y & \text{其它} \end{cases}$$

这里 $y = \sqrt[n+1]{\frac{2n}{n+1}}$, 我们有 $\rho(A_n^{(r)}) \geq \frac{P_H(x^*)}{\|x^*\|^r} = \frac{r!n \cdot y^2}{n(r-2)+(n+1)y^r} = (1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})^{-\frac{1}{r}} \rho_r$. 因此, $(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})^{-\frac{1}{r}} \rho_r \leq \rho(A_n^{(r)}) < \rho_r$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n^{(r)}) = \rho_r$. $\square$

另外, 我们考虑如下2-桥的概念. 由引理2.2.8, 当且仅当 H 是一致 $\frac{1}{4}$ -正规时, H 的谱半径为 $\rho_r = (r-1)!\sqrt[4]{4}$. 在后面的小节中, 我们仅考虑 $\alpha = \frac{1}{4}$. 如果 e 正好包含两个非页节点, 且 $H - e$ 是非连通的, 我们称 e 是 H 的一个2-桥. 令 uv 是 H 的2-桥 e 的两个非页节点, 删除边 e 且把 u 和 v 合为一个节点, 由此得到一个新的超图, 我们称这个过程为压缩, H 为 H/e 在点 w 的扩张. 超图 H' 在节点 w 处存在一个扩张当且仅当 w 是 H' 的一个切节点, 亦即, $H = H_1 \cup H_2$ 且 $H_1 \cap H_2 = \{w\}$.



我们有下面的引理:

引理4.1.2 令 H 是一个 r -一致超图. 假如 H 有一个2-桥 e , 那么我们有

1. 如果 $\rho(H/e) > \rho_r$, 那么 $\rho(H) > \rho_r$.
2. 如果 $\rho(H/e) = \rho_r$, 那么 $\rho(H) \geq \rho_r$. 等号成立当且仅当对 H/e 的任意一致 $\frac{1}{4}$ -正规加权关联矩阵 B , 在 w 点有 $\sum_{e' \in E(H_1)} B(w, e') = \frac{1}{2} = \sum_{e' \in E(H_2)} B(w, e')$.

证明. 令 B 为 H/e 的一致 α -正规加权关联矩阵, $\alpha = ((r-1)!/\rho(H/e))^r$. 令

$$x := \sum_{e' \in E(H_1)} B(w, e'), y := \sum_{e' \in E(H_2)} B(w, e') = 1 - x.$$

对于边 e 的任意页节点 z , 通过定义 $B(u, e) = y$, $B(v, e) = x$, $B(z, e) = 1$, 我们把加权矩阵 B 扩展为 H 的加权矩阵. 如果 $\rho(H/e) > \rho_r$, 那么 $\alpha < \frac{1}{4}$. 由于

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4},$$

因此 B 是 $\frac{1}{4}$ -超正规的. 由于 H 和 H/e 具有相同的圈, B 仍然是一致的. 因此, $\rho(H) > \rho_r$. 如果 $\rho(H/e) = \rho_r$, 那么 $\alpha = \frac{1}{4}$. 如果 $x = y = \frac{1}{2}$, 那么 B 是一致 $\frac{1}{4}$ -正规的. 因此, $\rho(H) = \rho_r$.

如果 $(x, y) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 那么

$$xy < \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4},$$

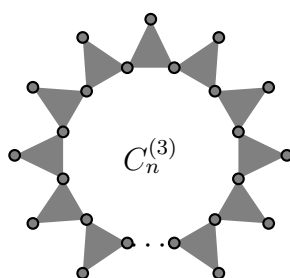
所以 B 是 $\frac{1}{4}$ -超正规的. 因此, $\rho(H) > \rho_r$. □

4.1.2 3-一致超图

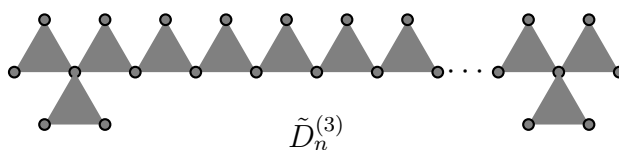
这一节，我们对谱半径至多为 $\rho_3 := 2\sqrt[3]{4}$ 的3-一致超图进行分类，我们的结果如下：

定理4.1.3 令 $\rho_3 = 2\sqrt[3]{4}$. 如果一个连通的3-一致超图 H 的谱半径等于 ρ_3 , 那么 H 一定是下列超图的一种：

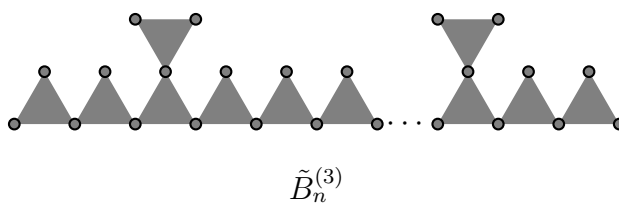
1. $C_n^{(3)}$: 有 $n(n \geq 3)$ 条边的简单圈.



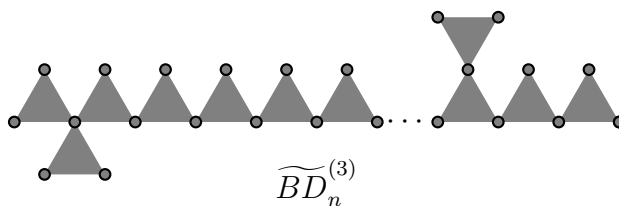
2. $\tilde{D}_n^{(3)}$ ($n \geq 5$), 其中 n 是边的数目.



3. $\tilde{B}_n^{(3)}$ ($n \geq 8$), 其中 n 是边的数目.



4. $\widetilde{BD}_n^{(3)}$ ($n \geq 6$), 其中 n 是边的数目.



5. 其它12个3-一致超图(有限图): $C_2^{(3)}$, $S_4^{(3)}$, $\tilde{E}_6^{(3)}$, $\tilde{E}_7^{(3)}$, $\tilde{E}_8^{(3)}$, $F_{2,3,4}^{(3)}$, $F_{2,2,7}^{(3)}$, $F_{1,5,6}^{(3)}$, $F_{1,4,8}^{(3)}$, $F_{1,3,14}^{(3)}$, $G_{1,1:0:1,4}^{(3)}$ 和 $G_{1,1:6:1,3}^{(3)}$. (见图4.1.)

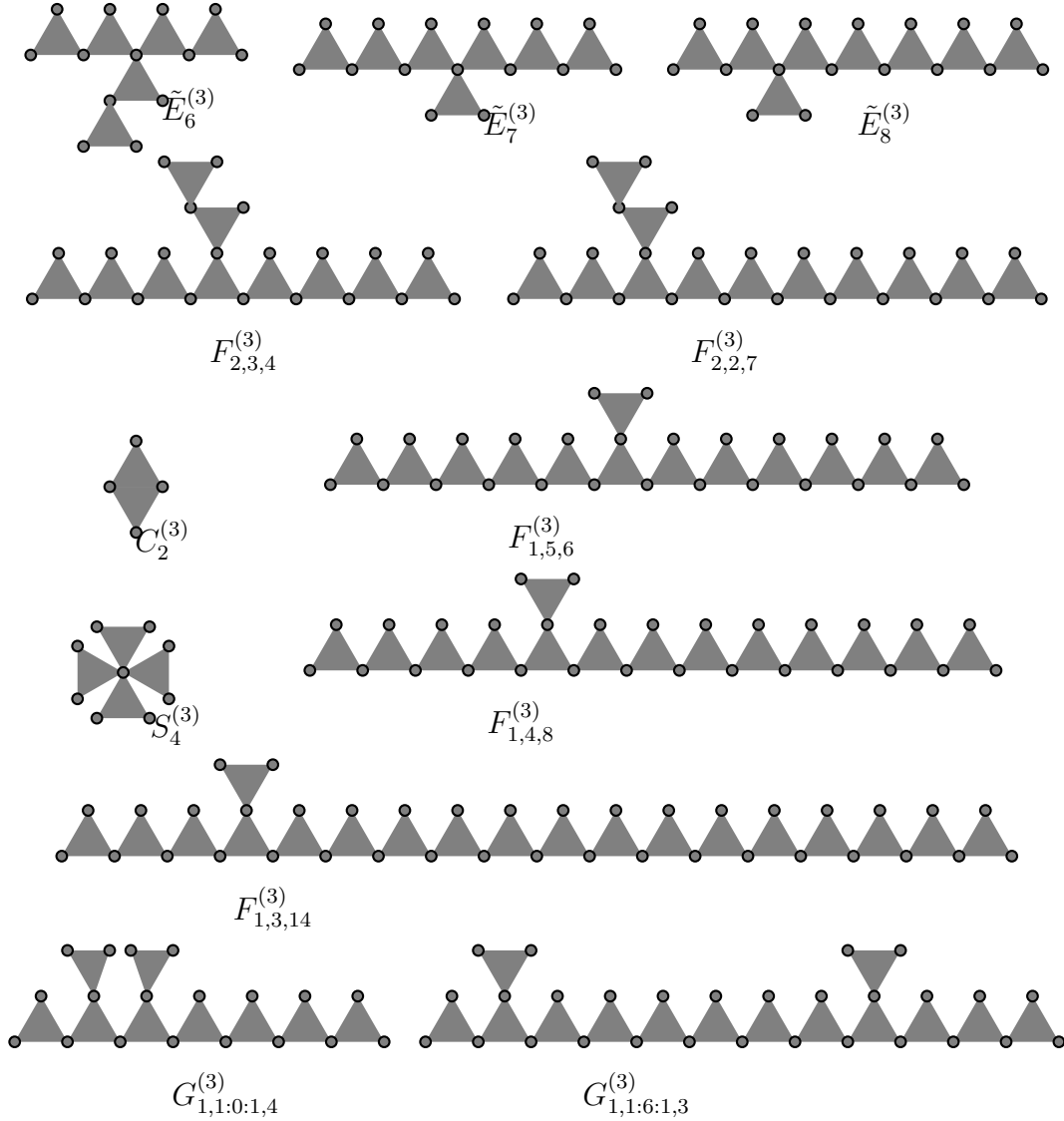
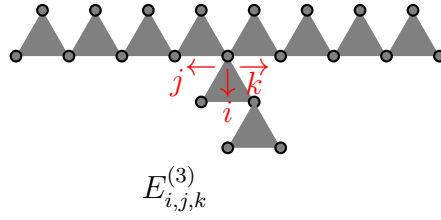
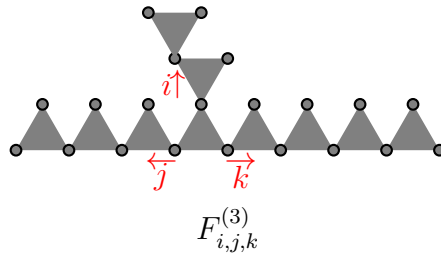


图 4.1: Twelve exceptional 3-uniform hypergraphs of spectral radius $2\sqrt[3]{4}$.

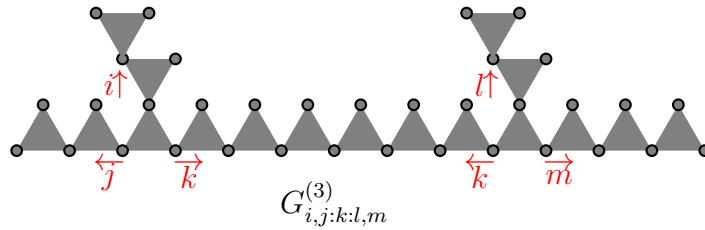
我们令 $E_{i,j,k}^{(3)}$ 表示由连接在同一节点上的三条长度分别为 i, j, k 的路径构成的3-一致超图。为了符号一致性, 我们令: $E_6^{(3)} = E_{1,2,2}^{(3)}$, $E_7^{(3)} = E_{1,2,3}^{(3)}$, $E_8^{(3)} = E_{1,2,4}^{(3)}$, $\tilde{E}_6^{(3)} = E_{2,2,2}^{(3)}$, $\tilde{E}_7^{(3)} = E_{1,3,3}^{(3)}$, $\tilde{E}_8^{(3)} = E_{1,2,5}^{(3)}$, $D_n^{(3)} = E_{1,1,n-2}^{(3)}$.



我们令 $F_{i,j,k}^{(3)}$ 表示由连接在一条边每个顶点上的长度分别分 i, j, k 的路径构成的3-一致超图。我们令 $D_n^{(3)} = F_{1,1,n-3}^{(3)}$, $B_n^{(3)} = F_{1,2,n-4}^{(3)}$ 。



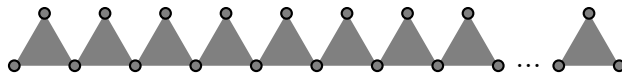
我们令 $G_{i,j:k:l,m}^{(3)}$ 表示连接在具有 $k+2$ 条边路径的4个端点的分别具有长度 i, j, l, m 的路径构成的3-一致超图，如下：



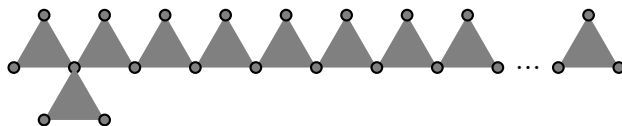
我们令: $B_n^{(3)} = G_{1,1:(n-6):1,1}^{(3)}$, $\bar{B}_n^{(3)} = G_{1,1:(n-7):1,2}^{(3)}$, $\tilde{B}_n^{(3)} = G_{1,2:(n-8):1,2}^{(3)}$. 易知, 定理4.1.3中所列超图的真子图的谱半径小于 ρ_3 , 但并不是所有谱半径小于 ρ_3 的超图都来源于此。下面是对谱半径小于 ρ_3 的超图的完全分类。

定理4.1.4 令 $\rho_3 = 2\sqrt[3]{4}$. 如果3-一致超图 H 的谱半径小于 ρ_3 , 那么 H 是下列超图中的一种:

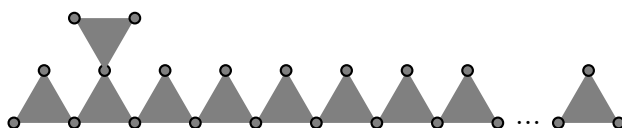
1. $A_n^{(3)}$ ($n \geq 1$): 具有 n 条边的路径.



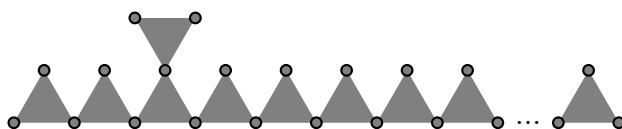
2. $D_n^{(3)}$ ($n \geq 3$): 其中 n 是边的数目.



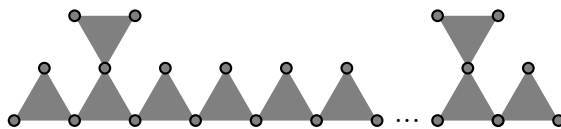
3. $D'_n^{(3)}$ ($n \geq 4$): 其中 n 是边的数目.



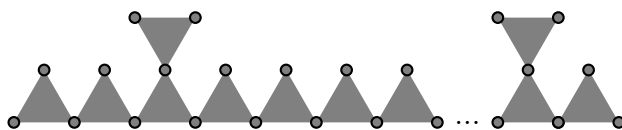
4. $B_n^{(3)}$ ($n \geq 5$), 其中 n 是边的数目.



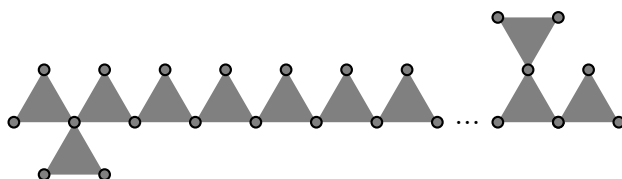
5. $B'_n^{(3)}$ ($n \geq 6$), 其中 n 是边的数目.



6. $\bar{B}_n^{(3)}$ ($n \geq 7$), 其中 n 是边的数目.



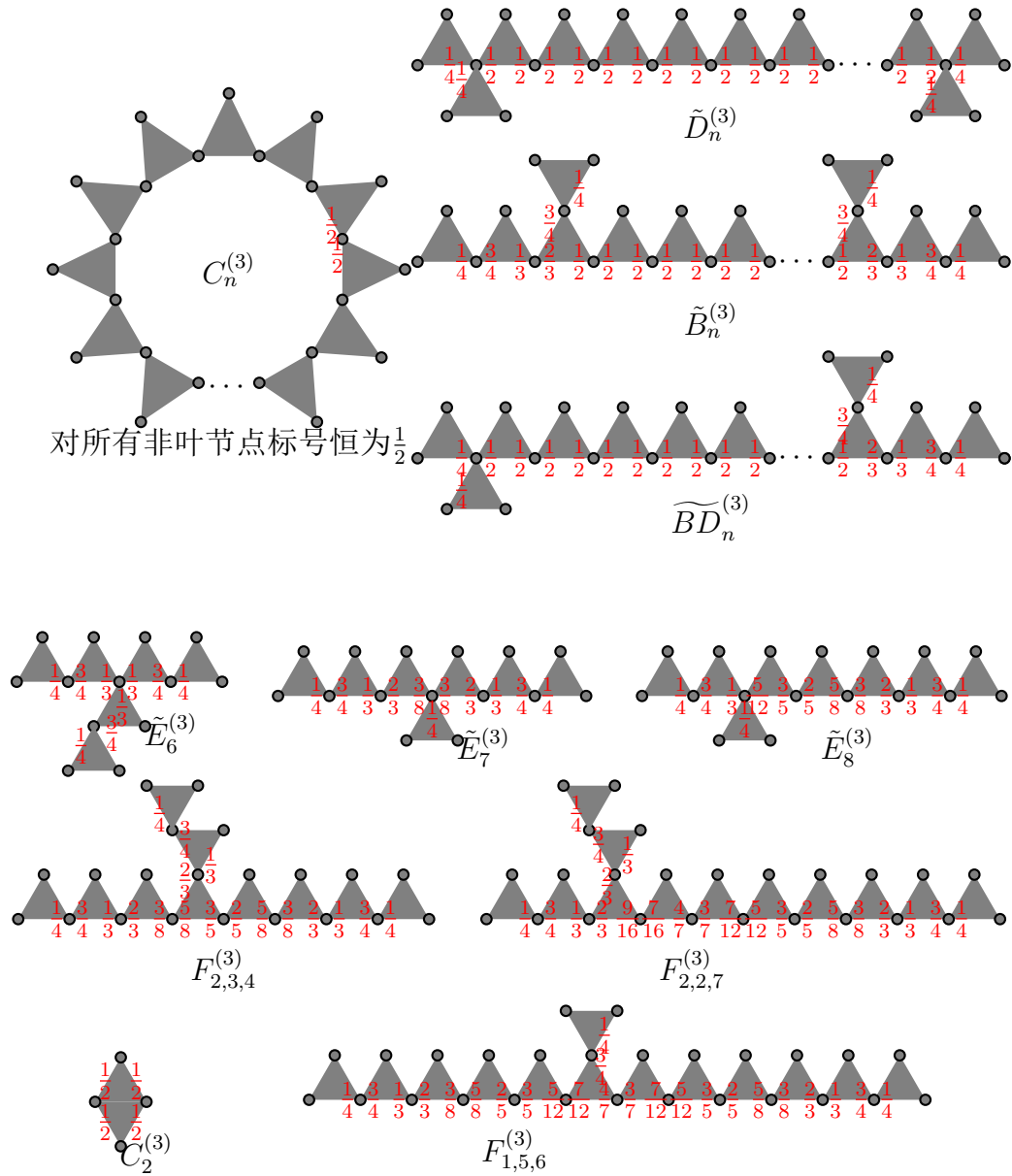
7. $BD_n^{(3)}$ ($n \geq 5$), 其中 n 是边的数目.

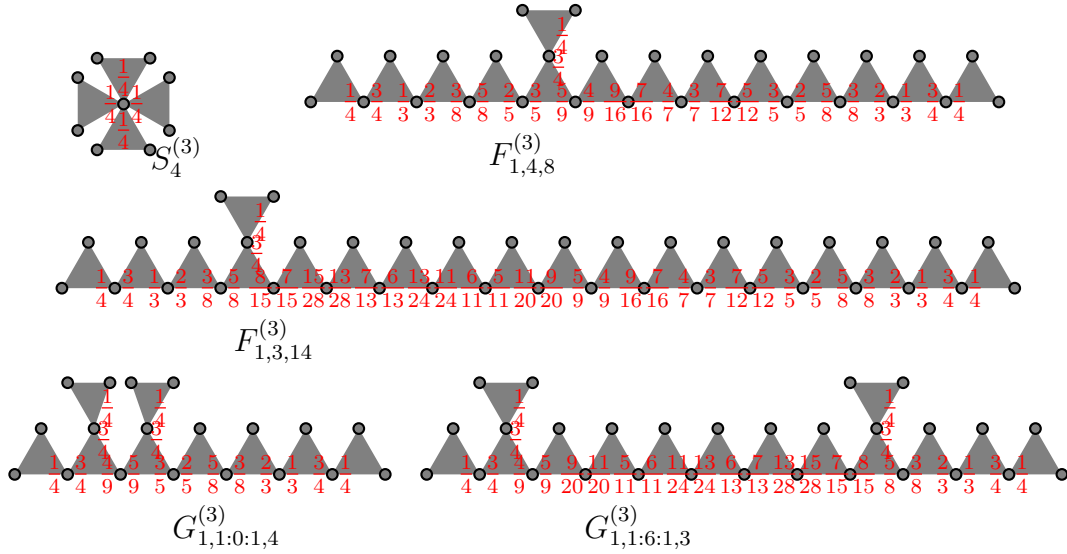


8. 其它31个3-一致超图(有限图): $E_6^{(3)}$, $E_7^{(3)}$, $E_8^{(3)}$, $F_{2,3,3}^{(3)}$, $F_{2,2,k}^{(3)}$ ($2 \leq k \leq 6$), $F_{1,3,k}^{(3)}$ ($3 \leq k \leq 13$), $F_{1,4,k}^{(3)}$ ($4 \leq k \leq 7$), $F_{1,5,5}^{(3)}$, 和 $G_{1,1:k:1,3}^{(3)}$ ($0 \leq k \leq 5$).

定理4.1.3 和4.1.4的证明:

我们首先证明定理4.1.3中所列3-一致超图的谱半径等于 ρ_3 . 我们对这些超图进行标号, 对节点 v 在边 $e(v \in e)$ 的一旁标上 $B(v, e)$, 如果节点 v 是叶节点, 标号恒为1, 我们删除这样的标号.





通过标号, 我们可得定理4.1.3中所列超图都是一致 $\frac{1}{4}$ -正规的, 因此这些超图的谱半径都等于 ρ_3 . 我们注意到, 定理4.1.4中的超图除了 $G_{1,1:k:1,3}^{(3)}$ ($0 \leq k \leq 5$)外, 都是定理4.1.3中所列部分超图的真子图. 由引理2.2.3, 这些超图的谱半径小于 ρ_3 . 因为 $\rho(G_{1,1:6:1,3}^{(3)}) = \rho_3$, 对于 $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 如果 $\rho(G_{1,1:k:1,3}^{(3)}) \geq \rho_3$ 那么由引理4.1.2, $\rho(G_{1,1:6:1,3}^{(3)}) \geq \rho_3$, 在 $\rho(G_{1,1:6:1,3}^{(3)})$ 中的部分标号应该为 $\frac{1}{2}$, 但这与我们的标号不符, 所以, 对于 $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\rho(G_{1,1:k:1,3}^{(3)}) < \rho_3$.

现在我们证明定理4.1.3和4.1.4中的3-一致超图是对谱半径至多为 ρ_3 的超图的完全分类. 假如 H 是谱半径 $\rho(H) \leq \rho_3$ 的3-一致超图, 我们有如下情形:

情形 1. 如果 $C_2^{(3)}$ 是 H 的真子图, 有引理2.2.3, $\rho(H) > \rho(C_2^{(3)}) = \rho_3$. 如果 $H = C_2^{(3)}$, 那么 $\rho(H) = \rho_3$, $C_2^{(3)}$ 已经在定理4.1.3的列表中. 所以, 如果 $H \neq C_2^{(3)}$, 我们可以认为 H 是一个简单超图.

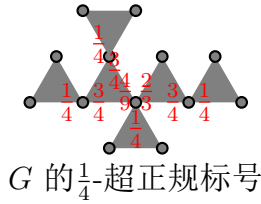
情形 2. 如果 H 包含一个圈, 那么 H 包含 $C_n^{(3)}$ ($n \geq 3$). 由引理2.2.3, $\rho(H) \geq \rho(C_n^{(3)}) = \rho_3$. 等号当且仅当 $H = C_n^{(3)}$ 时成立, $H = C_n^{(3)}$ 已经在定理4.1.3的列表中. 所以, 如果 $H \neq C_n^{(3)}$, 我们可以认为 H 是一个超树.

情形 3. 如果有一个节点 v 的度 $d_v \geq 4$, 那么 H 包含 $S_4^{(3)}$. 由引理2.2.3, $\rho(H) \geq \rho(S_4^{(3)}) = \rho_3$. 当 $H = S_4^{(3)}$ 时等号成立, $S_4^{(3)}$ 已经在定理4.1.3的列表中. 因此, 我们可以认为 H 中每个节点的度至多为3.

情形 4. 如果存在两个节点 u 和 v 使得 $d_u = d_v = 3$, 那么 H 包含 $\tilde{D}_n^{(3)}$. 由引理 2.2.3, $\rho(H) \geq \rho(\tilde{D}_n^{(3)}) = \rho_3$. 当 $H = \tilde{D}_n^{(3)}$ 时等号成立, 且 $H = \tilde{D}_n^{(3)}$ 已经在定理 4.1.3 的列表中. 因此, 我们可以认为 H 中至多有一个节点的度为 3.

情形 5. 假设 v 是唯一一个度数为 3 的节点, 其它节点的度至多为 2. 我们考虑连接节点 v 的 3 个分支如下:

1. 如果每个分支至少有两边, 那么 H 包含 $\tilde{E}_6^{(3)}$. 由引理 2.2.3, $\rho(H) \geq \rho(\tilde{E}_6^{(3)}) = \rho_3$. 当 $H = \tilde{E}_6^{(3)}$ 时等号成立, 且 $\tilde{E}_6^{(3)}$ 已经在定理 4.1.3 的列表中. 因此, 我们可以假设第一个分支仅含有一条边.
2. 如果边 e 不含有叶节点, 那么称边 e 为分支边. 如果第二个分支至少含有两条边, 第三个分支包含一个分支边, 那么 H 包含一个子图 G' , 这个子图可以缩减为 G , 如下:

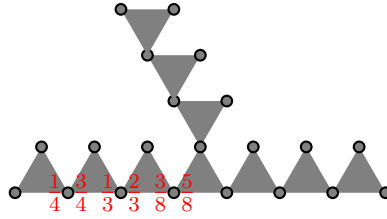


因为在 G 的中部节点的标号的和为 $\frac{4}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$, 所以 G 是严格超正规的且 $\rho(G) > \rho_3$. 由引理 2.2.3 和 4.1.2, 我们有 $\rho(H) > \rho(G') > \rho_3$. 矛盾!

3. 第一个分支和第二个分支分别具有一条边, 第三个分支至少包含一条分支边. 因为 $\rho(\widetilde{BD}_n^{(3)}) = \rho_3$, H 不能包含 $\widetilde{BD}_n^{(3)}$ 作为子图. 因此唯一可能的超图是 $\widetilde{BD}_n^{(3)}$ 和 $BD_n^{(3)}$, 这两个超图分别在定理 4.1.3 和定理 4.1.4 的列表中.
4. 在 H 中不存在分支边. 令 i, j, k ($i \leq j \leq k$) 分别表示节点 v 的 3 个分支的长度, 此时, 这个图形用 $E_{i,j,k}^{(3)}$ 表示. 我们已经研究了 $i = 1$ 的情况. 注意到 $E_{1,3,3}^{(3)} = \tilde{E}_7^{(3)}$ 和 $E_{1,2,5}^{(3)} = \tilde{E}_8^{(3)}$ 已经在定理 4.1.3 的列表中, 所以 (j, k) 仅能有下列的选择: $(2, 5), (2, 4), (3, 3), (2, 3), (2, 2)$ and $(1, k), k \geq 1$. 对应的超图分别是 $\tilde{E}_8^{(3)}, E_8^{(3)}, \tilde{E}_7^{(3)}, E_7^{(3)}, E_6^{(3)}$, 和 $D_n^{(3)}$. 这些超图都在定理 4.1.3 和 refcct1 的列表中.

情形 6. 现在我们可以假设超图 H 的节点的度至多为2. 根据分支边的数目, 我们有下列情形:

1. 如果 H 不含有分支边, 那么 H 是一条路径, 亦即 $H = A_n$, A_n 已经在定理4.1.4的列表中.
2. 如果 H 仅有一条分支边, 那么 $H = F_{i,j,k}^{(3)}$. 我们首先证明 $\rho(F_{3,3,3}^{(3)}) > \rho_3$. 对 $F_{3,3,3}^{(3)}$ 标号如下:



由对称性, 我们仅对一支进行标号. 因为在中部的边, 标号乘积为 $(\frac{5}{8})^3 < \frac{1}{4}$, 所以, 这是一个 $\frac{1}{4}$ -超正规标号, 因此, 由引理2.2.13, $\rho(F_{3,3,3}^{(3)}) > \rho_3$, 进而 H 不能包含 $F_{3,3,3}^{(3)}$. 由于 $i \leq j \leq k$, 我们有 $i = 1$ or 2 .

当 $i = 2$ 且 $j = 3$ 时, 由于 $\rho(F_{2,3,4}^{(3)}) = \rho_3$, 仅有两个超图 $F_{2,3,3}^{(3)}$ 和 $F_{2,3,4}^{(3)}$ 符合要求.

当 $i = 2$ 且 $j = 2$ 时, 由于 $\rho(F_{2,2,7}^{(3)}) = \rho_3$, 我们有 $2 \leq k \leq 7$.

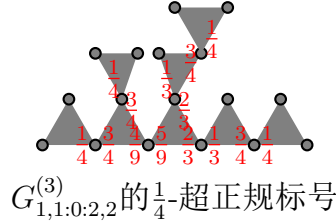
当 $i = 1$ 时, 由于 $\rho(F_{1,5,6}^{(3)}) = \rho_3$, 我们有 $j \leq 5$. 当 $j = 5$ 时, 我们有两个超图 $F_{1,5,5}^{(3)}$ and $F_{1,5,6}^{(3)}$ 符合要求. 当 $j = 4$ 时, 由于 $\rho(F_{1,4,8}^{(3)}) = \rho_3$, 我们有5个超图符合要求: $F_{1,4,k}^{(3)}$ ($4 \leq k \leq 8$). 当 $j = 3$ 时, 由于 $\rho(F_{1,3,14}^{(3)}) = \rho_3$, 我们有12个超图符合要求: $F_{1,3,k}^{(3)}$ for $3 \leq k \leq 14$. 当 $j = 2$ 时, k 取任意正整数亦可, 我们得一类超图 $B_n^{(3)}$. 当 $j = 1$ 时, k 取任意正整数亦可, 我们得一类超图 $D_n^{(3)}$.

所有这些超图都在定理4.1.3 或定理4.1.4的列表中.

3. 如果 H 正好包含两条分支边, 那么 $H = G_{i,j:k;l,m}^{(3)}$ ($i \leq j, l \leq m$).

如果 $i + j \geq 3$ 且 $l + m \geq 3$, 那么 H 包含 $G_{1,2:k;1,2}^{(3)} = \tilde{B}_{k+8}^{(3)}$. 由于 $\tilde{B}_n^{(3)}$ 的谱半径等于 ρ_3 , 所以 H 即为 $\tilde{B}_n^{(3)}$.

剩余的情况, 我们令 $i = j = 1$. 我们首先证明 $\rho(G_{1,1:0:2,2}^{(3)}) > \rho_3$, 标号如下:



由于 $G_{1,1:k:2,2}^{(3)}$ 可以由 $G_{1,1:0:2,2}^{(3)}$ 扩展 k 次得到. 由引理 4.1.2, 我们得 $\rho(G_{1,1:k:2,2}^{(3)}) > \rho_3$ ($k \geq 1$). 因此, 我们有 $l = 1$. 由于 $\rho(G_{1,1:0:1,4}^{(3)}) = \rho_3$, 由引理 4.1.2, 得 $\rho(G_{1,1:k:1,4}^{(3)}) > \rho_3$ ($k \geq 1$). 当 $m \geq 5$ 时, 没有超图符合要求.

当 $m = 4$ 时, 我们得 $G_{1,1:0:1,4}^{(3)}$.

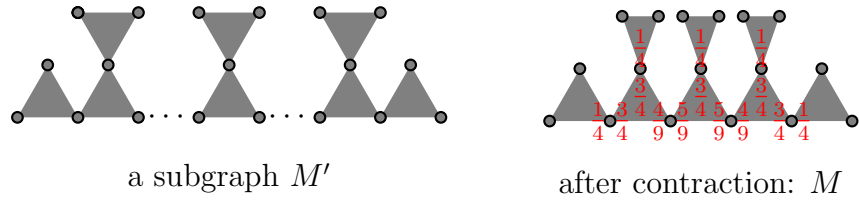
当 $m = 3$ 时, 由于 $\rho(G_{1,1:6:1,3}^{(3)}) = \rho_3$, 由引理 4.1.2, 我们得到 7 个超图: $\rho(G_{1,1:k:1,3}^{(3)})$ ($0 \leq k \leq 6$).

当 $m = 2$ 时, k 可取任意非负整数, 我们得到一类超图 $\bar{B}_n^{(3)}$.

当 $m = 1$ 时, k 可取任意非负整数, 我们得到一类超图 $B_n'^{(3)}$.

所有这些超图都在定理 4.1.3 或定理 4.1.4 的列表中.

4. H 至少包含 3 个分支边. 因为所有节点的度至多为 2, 所以每个分支边躺在一条路径上. 因此, H 包含子图 M' 如下. 将中间连接分支边的所有边去掉, 我们得 M . 我们对 M 标号如下:



在上述标号中, 中间边的标号乘积为 $\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{25}{108} < \frac{1}{4}$. 这是一个 $\frac{1}{4}$ -超正规标号. 因此, $\rho(M) > \rho_3$. 由引理 4.1.2, 得 $\rho(M') > \rho_3$. 因此, 由引理 2.2.3, 得 $\rho(H) > \rho(M) > \rho_3$. 矛盾.

综上, 谱半径等于 ρ_3 的超图都在定理 4.1.3 的列表中, 谱半径小于 ρ_3 的超图都在定理 4.1.4 的列表中.

4.1.3 r -一致超图

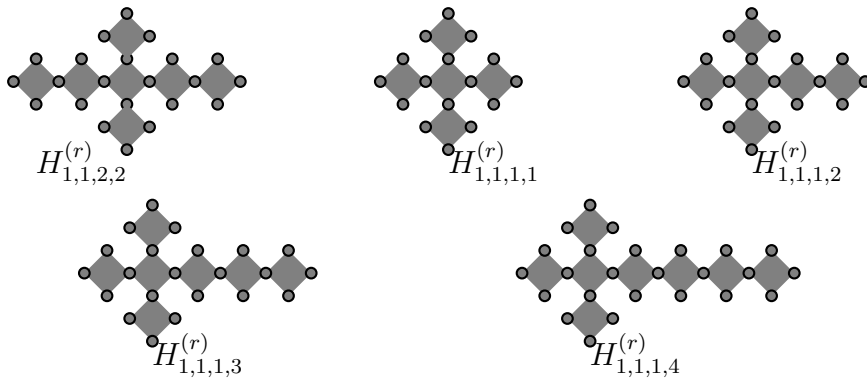
对任意正整数 $r \geq 2$, 令 $\rho_r := (r-1)\sqrt[r]{4}$. 在这一节, 我们对所有 $r \geq 4$ 的谱半径至多为 ρ_r 的 r -一致超图进行分类. 如果超图 $H = (V, E)$ 的每条边包含至少一个叶节点, 我们称 H 是可约的. 在这种情况下, 通过将节点 v_e 从边 e 中去掉, 我们可以定义许多 $(r-1)$ -一致超图 $H' = (V', E')$, 亦即, $V' = V \setminus \{v_e: e \in E\}$ 且 $E' = \{e - v_e: e \in E\}$. 我们说 H' 是由 H 缩减得到而 H 是由 H' 扩展得到. 易知, 对于任意 α -正规关联矩阵 B , 如果边 e 有一个叶节点 v_e , 那么 $B(v_e, e) = 1$. 我们有下列的引理:

引理4.1.5 如果 H 是由 H' 扩展得到, 那么 H 是一致 α -正规的当且仅当 H' 是一致 α -正规的 (对于同样的 α).

推论4.1.6 如果 H 是由 H' 扩展得到, 那么 $\rho(H) = \rho_r$ (或 $\rho(H) < \rho_r$) 当且仅当 $\rho(H') = \rho_{r-1}$ (或 $\rho(H') < \rho_{r-1}$).

对于谱半径至多为 ρ_r 的 r -一致超图, 我们尽量用与一般图相同的符号来表示. 对于一般图, 由 Smith 的理论, 谱半径小于 2 的图有 A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 ; 谱半径等于 2 的图有 $C_n = (\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \text{和 } \tilde{E}_8)$. 对于 $r \geq 3$, 令 $A_n^{(r)}, D_n^{(r)}, E_6^{(r)}, E_7^{(r)}, E_8^{(r)}, C_n^{(r)}, \tilde{D}_n^{(r)}, \tilde{E}_6^{(r)}, \tilde{E}_7^{(r)}$, 和 $\tilde{E}_8^{(r)}$ 表示从 Smith 理论列表中的一般图经过 $r-2$ 次扩展得到的 r -一致超图. 另外, 我们可将定理 4.1.3 和定理 4.1.4 中的超图进行扩展 $r-1$ 次扩展得到 r -一致超图. 但是, 我们并不能由此得到全部谱半径至多为 ρ_r 的 r -一致超图 ($r \geq 4$). 对于 $r \geq 4$, 我们需要找到不可约的 r -一致超图.

定理4.1.7 对于 $r \geq 5$, 谱半径至多为 ρ_r 的 r -一致超图都是可约的. 对于 $r = 4$, 谱半径至多为 ρ_r 的不可约的 r -一致超图如下:



证明. 令 H 为谱半径 $\rho(H) \leq \rho_r$ 的 r -一致超图.

1. 如果 H 不是简单的, 那么 H 包含一个有两条边相交 $s \geq 2$ 个节点的子图。我们称这个子图为 $G_s^{(r)}$. 按如下方式定义 $G_s^{(r)}$ 的加权关联矩阵 B : 对任意的节点 v 和边 e (另外的边为 e'),

$$B(v, e) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{如果 } v \in e \cap e', \\ 1 & \text{如果 } v \in e \setminus e', \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

我们容易验证, 如果 $s > 2$, B 是严格 $\frac{1}{4}$ -超正规的; 如果 $s = 2$, B 是 $\frac{1}{4}$ -正规的。因此,

$$\rho(H) \geq \rho(G_s^{(r)}) \geq \rho_r.$$

等号成立当且仅当 $H = G_2^{(r)} = C_2^{(r)}$. 在等号成立的情况下, H 是可约的。

2. 现在我们假设 H 是简单的。如果 H 不是超树, 那么 H 包含一个圈。令

$$C_l = v_0 e_1 v_1 e_1 \cdots v_{l-1} e_l v_0$$

为 H 中具有最小长度的圈。注意到在 C_l 的边 e_i 中, 除了 v_{i-1} 和 v_i 外, 其它节点都是叶节点。这个圈与 $C_l^{(r)}$ 等价, 且 $C_l^{(r)}$ 是 $\frac{1}{4}$ -正规的。我们有

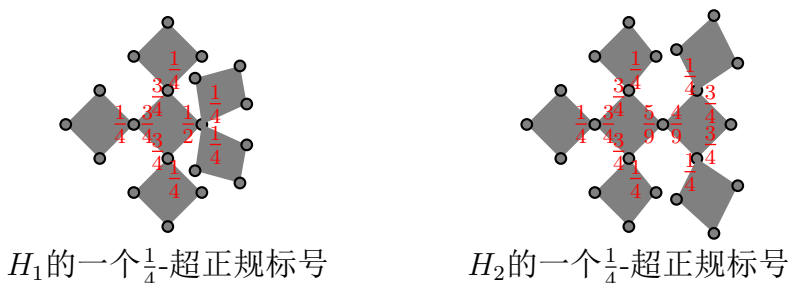
$$\rho(H) \geq \rho(C_l^{(r)}) = \rho_r.$$

等号当且仅当 $H = C_l^{(r)}$ 成立。此时, H 是可约的。

3. 最后, 我们假设 H 是一个超树。我们假设 H 是不可约的。存在一条边, 称为 $F_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ 使得对于 $i = 1, 2, \dots, r$, 每一个节点 v_i 在另外一条边 F_i 中。包含边 $F_0, F_1, \dots, F_r$ 的超图称为星状图, 用 $S_r^{(r)}$ 表示。在边 F_i 中, 我们令 $B(v_i, F_i) = \frac{1}{4}$, $B(v_i, F_0) = \frac{3}{4}$, 且对每一个 $v \neq v_i$, $B(v, F_i) = 1$ 。由于对于 $r \geq 5$, $\prod_{i=1}^r B(e_i, F_0) = (\frac{3}{4})^r < \frac{1}{4}$, 因此, 对于 $r \geq 5$, $S_r^{(r)}$ 是 $\frac{1}{4}$ -超正规的。我们有 $\rho(H) \geq \rho(S_r^{(r)}) > \rho_r$ 。矛盾! 因此, 对于 $r \geq 5$, 每一个谱半径至多为 ρ_r 的 r -一致超图是可约的。
4. 我们考虑 $r = 4$ 。我们首先可证, 去掉边 F_0 后, 4个分支都必须是路径。否则, 如果任一个分支包含一个分支节点或分支边, 那么 H 包含下面的子图 H'_1 或 H'_2 。



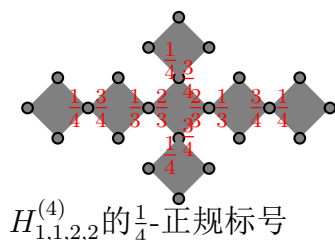
为了证明 $\rho(H'_1) > \rho_4$ 和 $\rho(H'_2) > \rho_4$, 我们只需对精简的超图 H_1 和 H_2 给出一个 $\frac{1}{4}$ -超正规标号:



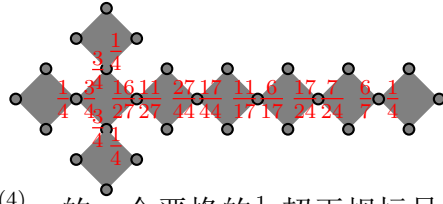
对于 H_1 , 在中部边的标号乘积为 $(\frac{3}{4})^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{128} < \frac{1}{4}$. 对于 H_2 , 在中部边的标号乘积为 $(\frac{3}{4})^3 \cdot \frac{5}{9} = \frac{15}{64} < \frac{1}{4}$. 因此, H_1 和 H_2 都是 $\frac{1}{4}$ -超正规的, 所以, 对于 $i = 1, 2$, $\rho(H_i) > \rho_4$, 由引理 4.1.2, 得 $\rho(H'_i) > \rho_4$. 矛盾!

因此, F_0 的 4 个分支都是路径. 我们用 $H_{i,j,k,l}^{(4)}$ 来表示 H , 这里 i, j, k , 和 l ($i \leq j \leq k \leq l$) 是 4 条路径的长度.

通过下面 $\frac{1}{4}$ -正规标号, 我们得 $\rho(H_{1,1,2,2}^{(4)}) = \rho_4$



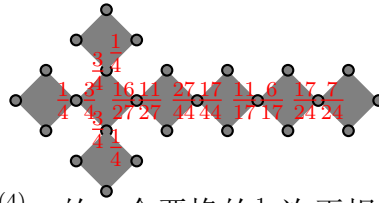
因此, 除了 $H_{1,1,2,2}^{(4)}$, H 只可能为 $H_{1,1,1,l}^{(4)}$. 然而, 如果 $l = 5$, 我们对 $H_{1,1,1,5}^{(4)}$ 标号如下:



$H_{1,1,1,5}^{(4)}$ 的一个严格的 $\frac{1}{4}$ -超正规标号

因为 $\frac{6}{7} + \frac{1}{4} > 1$, 这是一个严格的 $\frac{1}{4}$ -超正规标号. 我们得 $\rho(H_{1,1,1,5}^{(4)}) > \rho_4$. 因此, 由引理2.2.3, 我们得, 如果 $m \geq 5$, $\rho(H_{1,1,1,m}^{(4)}) > \rho_4$.

对于 $l = 4$, 我们对 $H_{1,1,1,4}^{(4)}$ 标号如下:



$H_{1,1,1,4}^{(4)}$ 的一个严格的 $\frac{1}{4}$ -次正规标号

由于 $\frac{17}{24} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 > \frac{1}{4}$, 这是一个严格的 $\frac{1}{4}$ -次正规标号. 因此, $\rho(H_{1,1,1,4}^{(4)}) < \rho_4$. 进而, 由引理2.2.3, 我们得对于 $l = 1, 2, 3, 4$ $\rho(H_{1,1,1,l}^{(4)}) < \rho_4$.

综上, 所有谱半径至多为 ρ_r 的不可约的 r -一致超图($r \geq 4$)都在定理4.1.7的列表中。

□

由推论4.1.6, 定理4.1.3, 定理4.1.4 和定理4.1.7, 我们有下列结论:

定理4.1.8 令 $r \geq 4$ 且 $\rho_r = (r-1)! \sqrt[r]{4}$. 如果 r -一致超图 H 的谱半径小于 ρ_r , 那么 H 是下列超图中的一种:

1. $A_n^{(r)}, D_n^{(r)}, D'_n^{(r)}, B_n^{(r)}, B'_n^{(r)}, \bar{B}_n^{(r)}, BD_n^{(r)}, E_6^{(r)}, E_7^{(r)}, E_8^{(r)}, F_{2,3,3}^{(r)}, F_{2,2,j}^{(r)}$ (for $2 \leq j \leq 6$), $F_{1,3,j}^{(r)}$ ($3 \leq j \leq 13$), $F_{1,4,j}^{(r)}$ ($4 \leq j \leq 7$), $F_{1,5,5}^{(r)}$, 和 $G_{1,1,j:1,3}^{(r)}$ ($0 \leq j \leq 5$). 这些 r -一致超图是由定理4.1.4中的超图经过 $r-3$ 次扩展而得到的。
2. $H_{1,1,1,1}^{(r)}, H_{1,1,1,2}^{(r)}, H_{1,1,1,3}^{(r)}, H_{1,1,1,4}^{(r)}$. 这些 r -一致超图是由定理4.1.7中的超图经过 $r-4$ 次扩展而得到的。

定理4.1.9 令 $r \geq 4$ 且 $\rho_r = (r-1)! \sqrt[r]{4}$. 如果 r -一致超图 H 的谱半径等于 ρ_r , 那么 H 是下列超图中的一种:

1. $C_n^{(r)}, \tilde{D}_n^{(r)}, \tilde{B}_n^{(r)}, \widetilde{BD}_n^{(r)}, C_2^{(r)}, S_4^{(r)}, \tilde{E}_6^{(r)}, \tilde{E}_7^{(r)}, \tilde{E}_8^{(r)}, F_{2,3,4}^{(r)}, F_{2,2,7}^{(r)}, F_{1,5,6}^{(r)}, F_{1,4,8}^{(r)}, F_{1,3,14}^{(r)}, G_{1,1:0:1,4}^{(r)}$ 和 $G_{1,1:6:1,3}^{(r)}$. 这些 r -一致超图是由定理4.1.3中的超图经过 $r-3$ 次扩展而得到的.

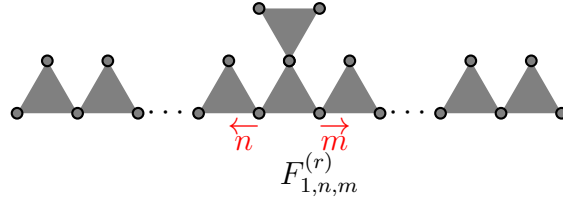
2. $H_{1,1,2,2}^{(r)}$, 这个超图是由定理4.1.7中的 $H_{1,1,2,2}^{(4)}$ 经过 $r-4$ 次扩展而得到的.

4.2 对谱半径位于两个极限点之间的超图的完全分类研究

4.2.1 引言和一些引理

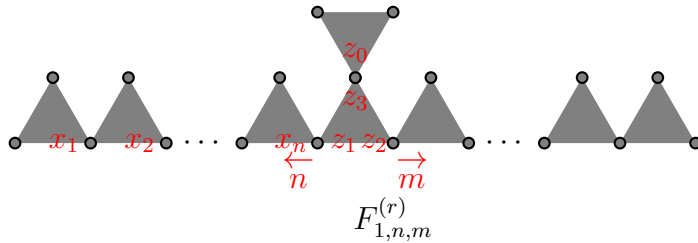
首先, 由下列引理, 我们可以找出谱半径的一个极限点.

引理4.2.1 令下图表示 $F_{1,n,m}^{(r)}$,



$F_{1,n,m}^{(r)}$ 的谱半径为 $\rho(F_{1,n,m}^{(r)})$. 那么, 当 $n, m \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \rho(F_{1,n,m}^{(r)}) = \rho'_r = (r-1)! \beta^{-\frac{1}{r}}$, 这里 $\beta = -\frac{1}{6} \cdot (100 + 12 \cdot \sqrt{69})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3 \cdot (100 + 12 \cdot \sqrt{69})^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3} \approx 0.2451223338$.

证明. 我们对 $F_{1,n,m}^{(r)}$ 标号如下:



令 $x_1 = z_0 = \beta$, $z_3 = 1 - \beta$, $x_2 = f(\beta)$, $x_n = f^{n-1}(\beta)$, $z_1 = 1 - x_n = 1 - f^{n-1}(\beta)$. 由对称性, 令 $z_2 = 1 - f^{m-1}(\beta)$. 当 $m, n \rightarrow \infty$ 时, 由引理2.2.14, 我们有 $z_1 = z_2 = 1 - f^{n-1}(\beta) = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 令 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \beta$, 即 $(\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})^2 \cdot (1 - \beta) = \beta$. 用maple解

此方程, 得 $\beta = -\frac{1}{6} \cdot (100 + 12 \cdot \sqrt{69})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3 \cdot (100 + 12 \cdot \sqrt{69})^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3} \approx 0.2451223338$. 由引理2.2.8, 我们得 $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \rho(F_{1,n,m}^{(r)}) = \rho'_r = (r-1)! \beta^{-\frac{1}{r}}$. $\square$

我们令 $\rho'_r = (r-1)! \beta^{-1/r}$, 这里 $\beta = -\frac{1}{6} \cdot (100 + 12 \cdot \sqrt{69})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3 \cdot (100 + 12 \cdot \sqrt{69})^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3} \approx 0.2451223338$ 是方程 $x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内的根. 我们有如下等式成立:

$$\frac{\beta}{(1-\beta)^2} = \frac{1 - \sqrt{1-4\beta}}{2}; \quad (4.1)$$

$$\frac{\beta}{(1-\beta)} = \left(\frac{1 + \sqrt{1-4\beta}}{2}\right)^2; \quad (4.2)$$

$$1 - \sqrt{\beta(1-\beta)} = \sqrt{\frac{\beta}{(1-\beta)}}; \quad (4.3)$$

$$(1-\beta)^5 = \beta. \quad (4.4)$$

我们考虑具有可数个节点的无限超图的谱半径. 对于无限 r -一致超图 H , 如果对任意节点 v , 存在 M 使得 $d_v \leq M$, 我们称 H 的度有界. 对于 H , 我们可以对它的节点排序, $v_1, v_2, \dots$, 使得 $H_n := H[v_1, v_2, \dots, v_n]$ 仍然是连通的. 易知 $\rho(H_n)$ 关于 n 的增函数且小于或等于 $(r-1)!M$. 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(H_n)$ 存在, 此极限值即为 H 的谱半径.

引理4.2.2 对任意连通无限且具有有界度的 r -一致超图 H , 上述谱半径的定义与节点的排序无关.

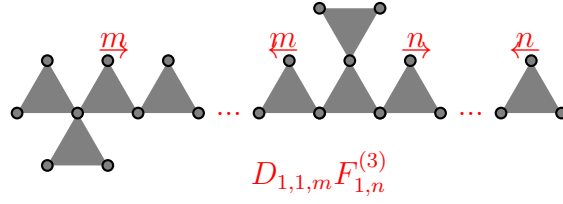
证明. 设 $v_1, v_2, \dots$ 和 $v'_1, v'_2, \dots$ 是节点的两个排序, 有两个单射 $\phi_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (for $i = 1, 2$) 使得

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \{v'_1, v'_2, \dots, v'_{\phi_1(n)}\};$$

$$\{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\} \subset \{v_1, v_2, \dots, v_{\phi_2(n)}\}.$$

令 $H_n := H[v_1, v_2, \dots, v_n]$ 和 $H'_n = H[v'_1, v'_2, \dots, v'_n]$. 我们有 $H_n \subseteq H'_{\phi_1(n)}$ and $H'_n \subseteq H_{\phi_2(n)}$. 所以 $\rho(H_n) \leq \rho(H'_{\phi_1(n)})$ 且 $\rho(H'_n) \leq \rho(H_{\phi_2(n)})$. 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(H_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(H'_n)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(H'_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(H_n)$. 两个极限是等价的. $\square$

引理4.2.3 令下图表示 $D_{1,1,m} F_{1,n}^{(3)}$,



$D_{1,1,m}F_{1,n}^{(3)}$ 的谱半径为 $\rho(D_{1,1,m}F_{1,n}^{(3)})$. 那么,

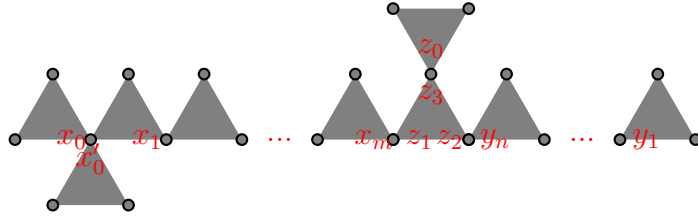
1. 如果 $\rho(D_{1,1,m}F_{1,n}^{(3)}) > \rho'_3$, 则 $\rho(D_{1,1,m+1}F_{1,n+1}^{(3)}) > \rho'_3$;
2. 如果 $\rho(D_{1,1,m}F_{1,n}^{(3)}) < \rho'_3$, 则 $\rho(D_{1,1,m+1}F_{1,n+1}^{(3)}) < \rho'_3$.

证明. 首先, 我们证明如果 $x \cdot y < \frac{\beta}{1-\beta}$, 那么 $(1 - \frac{\beta}{x})(1 - \frac{\beta}{y}) < \frac{\beta}{1-\beta}$. 事实上,

$$(1 - \frac{\beta}{x})(1 - \frac{\beta}{y}) = 1 - \beta \cdot \frac{x+y}{xy} + \frac{\beta^2}{xy} \leq (1 - \frac{\beta}{\sqrt{xy}})^2.$$

由于 $x \cdot y < \frac{\beta}{1-\beta}$, 我们容易验证 $-\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}} < 1 - \frac{\beta}{\sqrt{xy}} < 1 - \sqrt{\beta(1-\beta)} = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}$. 因此, 我们有 $(1 - \frac{\beta}{x})(1 - \frac{\beta}{y}) < \frac{\beta}{1-\beta}$.

我们对此图标号如下,



令 $x_0 = x'_0 = y_1 = z_0 = \beta$, $z_3 = 1 - \beta$, $x_1 = f(2\beta)$, $x_m = f^m(2\beta)$, $y_n = f^{n-1}(\beta)$. $z_1 = 1 - f^m(2\beta)$, $z_2 = 1 - f^{n-1}(\beta)$, $x = z_1 = 1 - f^m(2\beta)$, $y = z_2 = 1 - f^{n-1}(\beta)$, 如果 $xy = (1 - f^m(2\beta))(1 - f^{n-1}(\beta)) < \frac{\beta}{1-\beta}$, 那么, 我们得 $(1 - \frac{\beta}{x})(1 - \frac{\beta}{y}) = (1 - f^{m+1}(2\beta))(1 - f^n(\beta)) < \frac{\beta}{1-\beta}$, 亦即, 如果 $\rho(D_{1,1,m}F_{1,n}^{(3)}) < \rho'_3$, 那么 $\rho(D_{1,1,m+1}F_{1,n+1}^{(3)}) < \rho'_3$.

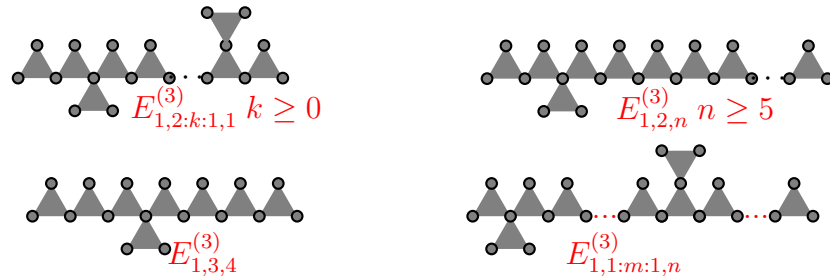
第二条的证明可用倒推法, 与第一条的证明类似, 我们在这里不再给出证明.

□

4.2.2 3-一致超图

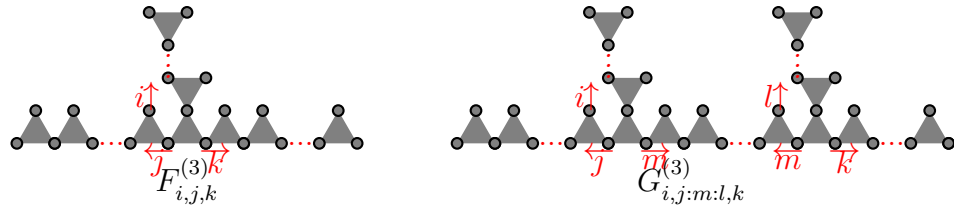
令 $\beta = -\frac{1}{6} \cdot (100 + 12 \cdot \sqrt{69})^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3 \cdot (100 + 12 \cdot \sqrt{69})^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{3}$, $\rho'_3 = 2\beta^{-\frac{1}{3}}$, $\rho_3 = 2\sqrt[3]{4}$. 我们有下面定理:

定理4.2.4 设连通的3-一致超图 H 的谱半径为 $\rho(H)$. 如果 $\rho_3 < \rho(H) \leq \rho'_3$, 那么 H 一定为下列超图中的一种:



在 $E_{1,1;m:1,n}^{(3)}$ 中, (m, n) 只能取下列值:

$(0, 3)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(4, n)$ ($3 \leq n \leq 5$), $(5, n)$ ($3 \leq n \leq 6$), (m, n) ($m \geq 6, 3 \leq n \leq m$).



在 $F_{i,j,k}^{(3)}$ 中, (i, j, k) 只能取下列值:

$(1, j, \infty)$ ($j \geq 1$), $(2, 2, k)$ ($k \geq 8$), $(2, 3, k)$ ($k \geq 5$), $(2, 4, k)$ ($3 \leq k \leq 6$), $(3, 3, k)$ ($k = 3, 4$).

在 $G_{i,j;m:l,k}^{(3)}$ 中, 当 $i \neq 1$ 且 $l \neq 1$ 时, (i, j, m, l, k) 只能取下列值:

$(2, 3, m, 1, 1)$ ($m \geq 0$), $(2, 2, m, 2, 2)$ ($0 \leq m < 9$), $(2, 2, m, 1, 3)$ ($0 \leq m < 9$), $(2, 2, m, 1, 2)$ ($m \geq 2$).

当 $i = 1$ 且 $l = 1$ 时, 没发现明显规律.

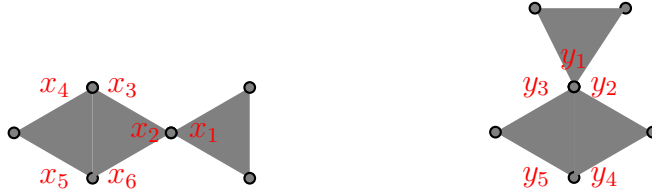
证明. 我们首先证明定理4.2.4中3-一致超图的谱半径 $\rho(H)$ 满足 $\rho_3 < \rho(H) \leq \rho'_3$. 我们可以证明它们都是 β -正规的或 β -次正规的.

假设 H 是一个3-一致超图, 它的谱半径为 $\rho(H)$ 满足 $\rho_3 < \rho(H) \leq \rho'_3$, 但是 H 不在定理4.2.4的列表中.

情形1. 如果 H 包含 $C_2^{(3)+}$ 或 $C_2'^{(3)+}$

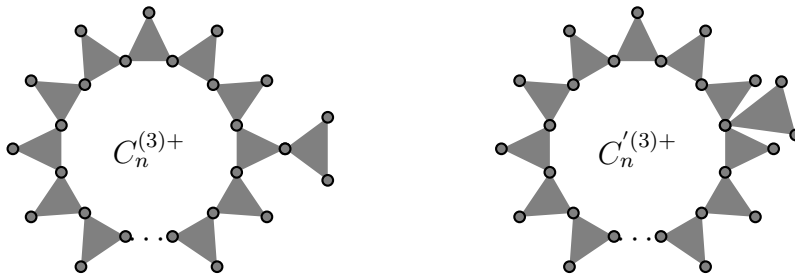


我们对上面两图形标号如下,

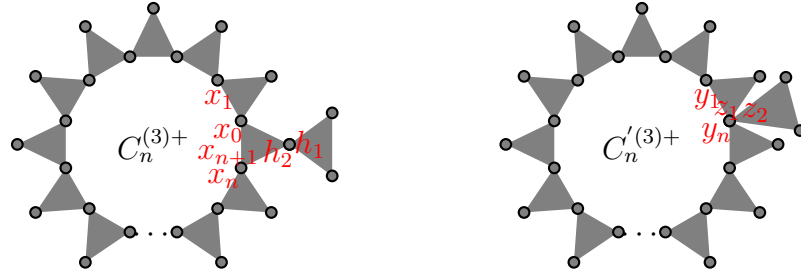


在图 $C_2^{(3)+}$ 中, 令 $x_1 = \beta$, $x_2 = 1 - \beta$, $x_3 = x_6 = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}$, $x_4 = x_5 = \sqrt{\beta}$. 在图 $C_2'^{(3)+}$ 中, 令 $y_1 = \beta$, $y_2 = y_3 = \frac{1-\beta}{2}$, $y_4 = y_5 = \frac{2\beta}{1-\beta}$. 我们可以验证 $x_3 + x_4 \approx 1.0649 > 1$ 且 $y_4 + y_5 \approx 1.2989 > 1$. 因此, 由引理2.2.13, 我们得 $\rho(C_2^{(3)+}) > \rho'_3$ 和 $\rho(C_2'^{(3)+}) > \rho'_3$. 如果 H 包含 $C_2^{(3)+}$ or $C_2'^{(3)+}$, 由引理2.2.3, 我们得 $\rho(H) > \rho'_3$. 因此, 如果 $\rho(H) \leq \rho'_3$, 那么, 在图 H 中, 任意两条边至多有一个交点. 因此, H 一定是一个简单超图.

情形2. 如果 H 包含一个圈, 且 H 包含 $C_n^{(3)+}$ or $C_n'^{(3)+}$

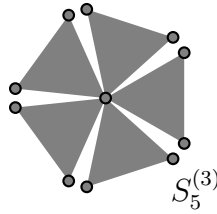


我们对这个图标号如下:

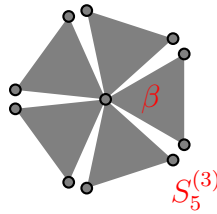


令 $h_1 = x_0 = z_2 = y_1 = \beta$, $h_2 = 1 - \beta$. 由引理2.2.14, 令 $x_1 = f(\beta)$ 且由引理2.2.14, 我们有 $x_n = f^n(\beta) = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} - \varepsilon$. 用同样的方法, 我们得 $y_n = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} - \varepsilon$. 令 $x_{n+1} = 1 - x_n = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} + \varepsilon$, $z_1 = 1 - y_n - z_2 = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} - \beta + \varepsilon$. 我们可以验证 $x_0 \cdot h_2 \cdot x_{n+1} < x_0 \cdot h_2 \cdot \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} \approx 0.1054 < \beta$, $y_1 \cdot z_1 \cdot 1 < \beta \cdot (\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} - \beta) \approx 0.0796 < \beta$ 因此, 由引理2.2.13, 我们得 $\rho(C_n^{(3)+}) > \rho'_3$ and $\rho(C_n'^{(3)+}) > \rho'_3$. 因此, 如果 H 包含 $C_n^{(3)+}$ or $C_n'^{(3)+}$, 由引理2.2.3, 我们得 $\rho(H) > \rho'_3$. 因此, 我们可以认为 H 是一个超树.

情形3. 如果 $\exists v \in V(H)$, 使得 $d_v \geq 5$, 那么 H 包含 $S_5^{(3)}$.

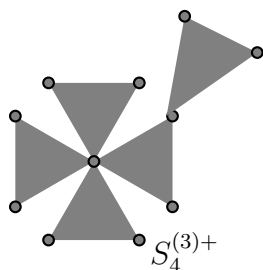


我们对此图标号如下:

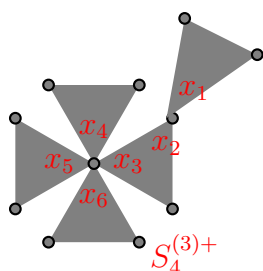


由对称性, 我们仅对一支标号. 我们可以验证 $5\beta \approx 1.225611667 > 1$, 因此, 由引理2.2.3 和引理2.2.13, 我们得 $\rho(H) > \rho'_3$. 因此, H 的每个节点的度至多为4.

情形4. 如果 $\exists v \in V(H)$, 使得 $d_v = 4$, 且 H 包含 $S_4^{(3)+}$,

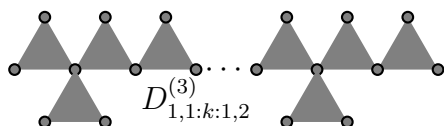


我们对此图标号如下：

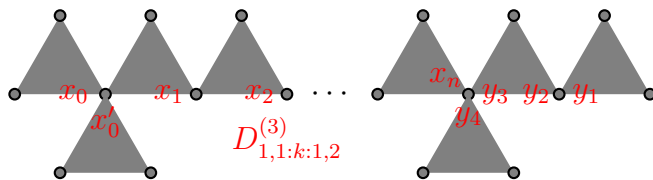


这里 $x_1 = \beta$, $x_2 = 1 - \beta$, $x_3 = \frac{\beta}{1-\beta}$, $x_4 = x_5 = x_6 = \beta$. 我们可以验证 $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \approx 1.0601 > 1$, 因此, 由引理2.2.3 和引理2.2.13, 我们得 $\rho(H) > \rho(S_4^{(3)+}) > \rho'_3$. 因此, 由于 $\rho(S_4^{(3)}) = \rho_3$ 且 $\rho(S_4^{(3)+}) > \rho'_3$, H 的每个节点的度至多为3.

情形5. 如果至少存在3个节点 v_i , 使得 $d_{v_i} = 3, i = 1, 2, 3$, 那么 H 包含 $D_{1,1:k;1,2}^{(3)}$.

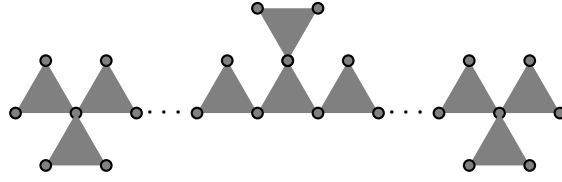


我们对此图标号如下：

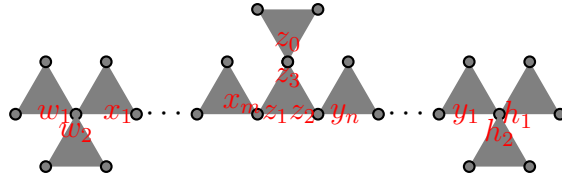


令 $x_0 = x'_0 = \beta$. 由于 $\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} < 2\beta < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 由引理2.2.14, 我们得 $x_1 = f(2\beta)$, $x_n = f^n(2\beta) = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} + \varepsilon$. 令 $y_1 = y_4 = \beta$, $y_2 = 1 - \beta$, $y_3 = \frac{\beta}{1-\beta}$. 我们可以验证 $y_3 + y_4 + x_n = 1.0 + \varepsilon > 1$. 因此, 由引理2.2.3 和引理2.2.13, 我们得 $\rho(H) > \rho'_3$.

如果至少存在两个 v_i , 使得 $d_{v_i} = 3, i = 1, 2$, 且 H 包含 $D_{1.1:k:1.2}^{(3)}$ 或下图

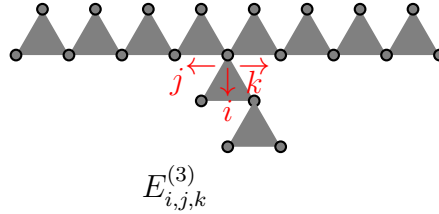


我们对上图标号如下:



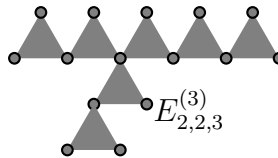
令 $w_1 = w_2 = z_0 = \beta$, $z_3 = 1 - \beta$. 由于 $\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} < 2\beta < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 由引理2.2.14, 令 $x_1 = f(2\beta)$, 我们得 $x_m = f^m(2\beta) = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} + \varepsilon$. 因此, $z_1 = 1 - x_m = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} - \varepsilon$. 由对称性, $z_2 = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} - \varepsilon$. 我们可以验证 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 < (1 - \beta) \cdot (\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})^2 = \beta$. 因此, 由引理2.2.3 和引理2.2.13, 我们得 $\rho(H) > \rho'_3$. 因此, H 中至多有一个节点 v 使得 $d_v = 3$.

情形6. 设 v 是唯一一个度为3的节点, 其它节点的度至多为2. 我们用 $E_{i,j,k}^{(3)}$ 表示由连接在节点 v 上的3条长度分别为 i, j, k 的路径形成的3-一致超图.

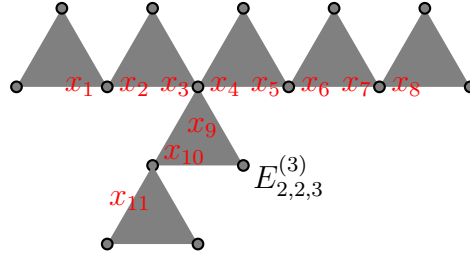


我们考虑连接在节点 v 上的3个分支.

1. 由于 $\rho(E_{2,2,2}^{(3)}) = \rho_3$, 我们考虑 $E_{2,2,3}^{(3)}$.

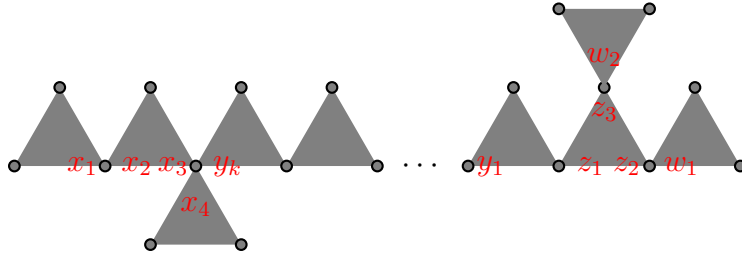


我们对上图标号如下:



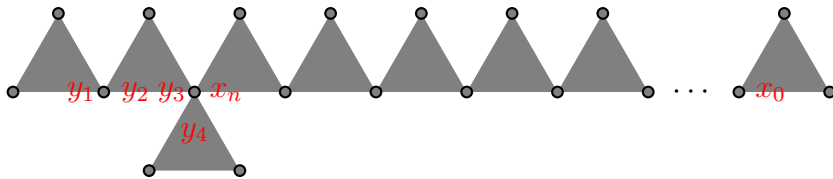
令 $x_1 = x_8 = x_{11} = \beta$, $x_2 = x_7 = x_{10} = 1 - \beta$, $x_3 = x_6 = x_9 = \frac{\beta}{1-\beta}$, $x_5 = \frac{1-2\beta}{1-\beta}$, $x_4 = \frac{\beta(1-\beta)}{1-2\beta}$, 我们可以验证 $x_3 + x_4 + x_9 \approx 1.0124 > 1$. 因此, 由引理2.2.3 和引理2.2.13, 如果 H 包含 $E_{2,2,3}^{(3)}$, 我们得 $\rho(H) > \rho'_3$. 因此, 我们可以认为第一个分支只包含一条边.

2. 如果边 e 的节点都不是叶节点, 我们称边 e 为分支边. 当 $i = 1, j = 2$ 时, 第三个分支包含一条边, H 包含 $D_{1,2,k}F_{1,1}^{(3)}$.



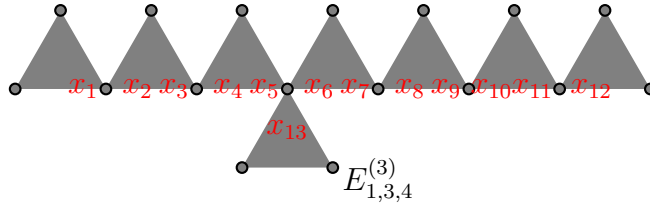
令 $x_1 = x_4 = w_1 = w_2 = \beta$, $x_2 = z_2 = z_3 = 1 - \beta$, $x_3 = \frac{\beta}{1-\beta}$, $z_1 = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$. 易证 $\frac{\beta}{(1-\beta)^2} = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 令 $y_1 = \frac{\beta}{1-z_1} = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 由引理2.2.14, 我们得 $y_k = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 我们可以验证 $x_3 + x_4 + y_k = 1$. 因此, $D_{1,2,k}F_{1,1}^{(3)}$ 具有 β -正规标号, 我们有 $\rho(D_{1,2,k}F_{1,1}^{(3)}) = \rho'_3$. 因此, 当 $i \geq 1, j \geq 2, k \geq 2$ 且 H 包含一条分支边时, 由引理2.2.3, 我们得 $\rho(H) \geq \rho'_3$, 当 H 为 $D_{1,2,k}F_{1,1}^{(3)}$ 时, 等号成立, 这里 $k \geq 0$.

3. 当 $i = 1, j = 2, k = n + 1$, H 不包含分支边时, $H = E_{1,2,k}^{(3)}$ 如下:

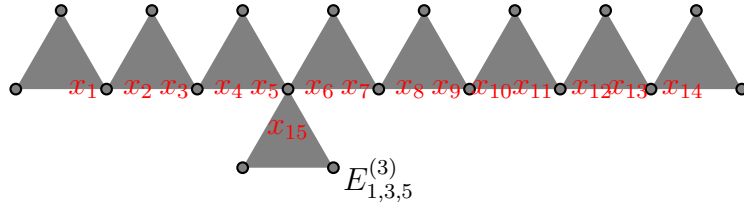


令 $x_0 = \beta$, $n = k - 1$, 那么当 $n \rightarrow \infty$, 由引理2.2.14, 我们得 $x_n = f^n(\beta) = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} - \varepsilon$. 令 $y_1 = y_4 = \beta$, $y_2 = 1 - \beta$, $y_3 = \frac{\beta}{1-\beta}$. 我们可以验证 $y_3 + y_4 + x_n = 1 - \varepsilon < 1$. 因此, 我们得 $\rho(H) < \rho'_3$. 由于 $\rho(E_{1,2,5}^3) = \rho_3$, 因此, 当 $n > 5$ 时, $\rho_3 < \rho(H) < \rho'_3$.

4. 第一个分支包含一条边, 第二个分支包含3条边, 第三个分支包含 k 条边, 没有分支边. 当 $k = 3$ 时, $\rho(H) = \rho_3$. 当 $k = 4$ 时, 图形如下,

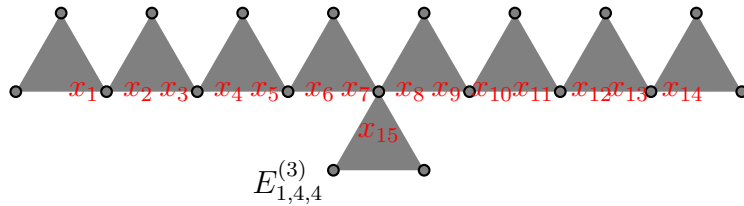


令 $x_1 = x_{12} = x_{13} = \beta$, $x_2 = x_{11} = 1 - \beta$, $x_3 = x_{10} = \frac{\beta}{1-\beta}$, $x_4 = x_9 = \frac{1-2\beta}{1-\beta}$, $x_5 = x_8 = \frac{\beta(1-\beta)}{1-2\beta}$, $x_7 = \frac{\beta^2-3\beta+1}{1-2\beta}$, $x_6 = \frac{\beta(1-2\beta)}{\beta^2-3\beta+1}$, 我们可以验证 $x_5 + x_6 + x_{13} \approx 0.9929 < 1$. 因此, $\rho_3 < \rho(E_{1,3,4}^{(3)}) < \rho'_3$. 当 $k = 5$ 时, 图形如下,



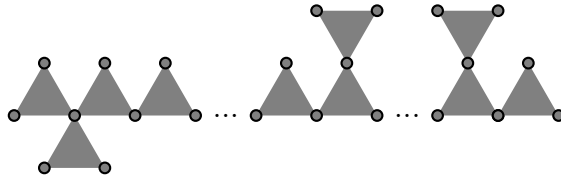
令 $x_1 = x_{14} = x_{15} = \beta$, $x_2 = x_{13} = 1 - \beta$, $x_3 = x_{12} = \frac{\beta}{1-\beta}$, $x_4 = x_{11} = \frac{1-2\beta}{1-\beta}$, $x_5 = x_{10} = \frac{\beta(1-\beta)}{1-2\beta}$, $x_6 = \frac{\beta(\beta^2-3\beta+1)}{3\beta^2-4\beta+1}$. 我们可以验证 $x_5 + x_6 + x_{15} \approx 1.0066 > 1$. So, $\rho(E_{1,3,5}^{(3)}) > \rho'_3$.

5. 第一个分支包含一条边, 第二和第三个分支都至少包含4条边, 没有分支边. 图 $E_{1,4,4}^{(3)}$ 如下,

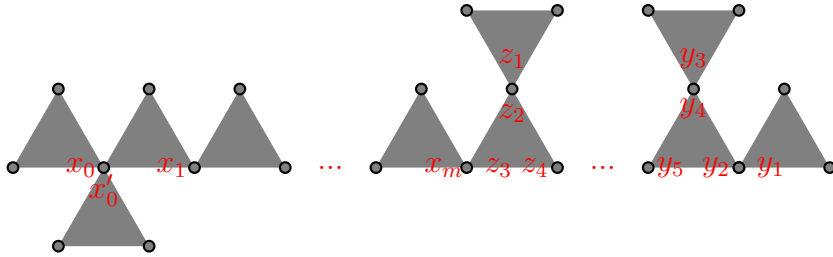


令 $x_1 = x_{14} = x_{15} = \beta$, $x_2 = x_{13} = 1 - \beta$, $x_3 = x_{12} = \frac{\beta}{1-\beta}$, $x_4 = x_{11} = \frac{1-2\beta}{1-\beta}$, $x_5 = x_{10} = \frac{\beta(1-\beta)}{1-2\beta}$, $x_6 = \frac{\beta(\beta^2-3\beta+1)}{3\beta^2-4\beta+1}$. 我们可以验证 $x_7 + x_8 + x_{15} \approx 1.0147 > 1$. So, $\rho(E_{1,4,4}^{(3)}) > \rho'_3$. 因此, 如果 H 真包含 $E_{1,4,4}^{(3)}$, 那么 $\rho(H) > \rho(E_{1,4,4}^{(3)}) > \rho'_3$.

6. 第一和第二条边都仅包含一条边, 第三个分支包含 k 条边。当第三个分支不含分支边时, 对任意 $k \geq 1$, 有 $\rho(H) < \rho_3$. 当第三个分支包含两个分支边时, 图 $D_{1,1,m}G_{0,1:n:1,1}$ 如下,

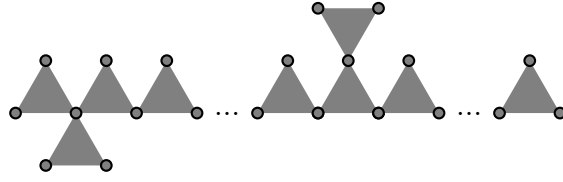


我们对此图标号如下,

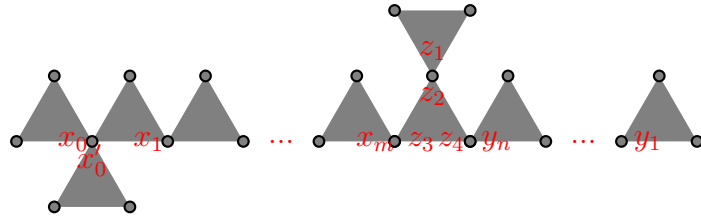


令 $x_0 = x'_0 = y_1 = y_3 = z_1 = \beta$, $z_2 = y_2 = y_4 = 1 - \beta$, $x_1 = f(2\beta)$, $x_m = f^m(2\beta)$, $z_3 = 1 - f^m(2\beta)$, $y_5 = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$. 由于 $\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} < 2\beta < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 由引理2.2.14, 我们得 x_m 关于 m 是单调递减的. 因此, $z_3 = 1 - x_m$ 关于 m 是单调递增的. 因此, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 我们得 $x_m = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} + \varepsilon$, $z_3 = 1 - x_m = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} - \varepsilon$. 由于 $\frac{\beta}{(1-\beta)^2} = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 我们得 $z_4 = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 我们可以验证 $z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 < \beta \cdot (1 - \beta) < \beta$, 因此 $D_{1,1,m}G_{0,1:n:1,1}$ 是 β -超正规的, 我们有 $\rho(D_{1,1,m}G_{0,1:n:1,1}) > \rho'_3$. 因此, 如果 H 在第三个分支中至少包含2个分支边, 那么 H 包含 $D_{1,1,m}G_{0,1:n:1,1}$, 所以 $\rho(H) > \rho(D_{1,1,m}G_{0,1:n:1,1}) > \rho'_3$. 因此, 我们可以认为在 H 第3个分支中仅有一个分支边

当在第3个分支中仅含一个分支边时, 图 $D_{1,1,m}F_{1,n}^{(3)}$ 如下,



我们对此图标号如下,



令 $x_0 = x'_0 = y_1 = z_1 = \beta$, $z_2 = 1 - \beta$, $x_1 = f(2\beta)$, $x_m = f^m(2\beta)$, $y_n = f^{n-1}(\beta)$. $z_3 = 1 - f^m(2\beta)$, $z_4 = 1 - f^{n-1}(\beta)$. 由于 $\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} < 2\beta < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$, $0 < \beta < \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 由引理2.2.14, 我们得 x_m 关于 m 单调递减, y_n 关于 n 单调递增. 因此, $z_3 = 1 - x_m$ 关于 m 单调递增, $z_4 = 1 - y_n$ 关于 n 单调递减. 进一步, 由[?], 我们得 $\rho(\widetilde{BD}_n^3) = \rho(D_{1,1,m}F_{1,2}^{(3)}) = \rho_3$, $\rho(D_{1,1,m}F_{1,1}^{(3)}) < \rho_3$, 这里 $m \geq 0$, 因此, 如果 $\rho_3 < \rho(D_{1,1,m}F_{1,n}^{(3)}) \leq \rho'_3$, 我们仅考虑 $n \geq 3$ 时下列情形:

(a) 当 $m = 0, n = 3$ 时, 令 $z_3 = 1 - 2\beta$, $z_4 = 1 - f^2(\beta) = 1 - \frac{\beta(1-\beta)}{1-2\beta}$. 我们可以验证 $z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = \beta$ (see the Appendix), so $\rho(D_{1,1,0}F_{1,3}^{(3)}) = \rho'_3$. 当 $n > 3$ 时, 由于 $z_4 = 1 - y_n$ 关于 n 单调递减, 我们有 $z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 < \beta$, 因此, 我们得 $\rho(D_{1,1,0}F_{1,n}^{(3)}) > \rho'_3$.

(b) 当 $m = 1$ 时, 如果 $n = 3$, 我们可以验证 $z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \approx 0.2496 > \beta$, 因此 $D_{1,1,1}F_{1,3}^{(3)}$ 是严格 β -次正规的; 如果 $n = 4$, 有 $z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \approx 0.2410 < \beta$, 因此 $D_{1,1,1}F_{1,3}^{(3)}$ 是严格 β -超正规的. 因此, 当 $m = 1, n = 3$ 时, $\rho_3 < \rho(D_{1,1,1}F_{1,3}^{(3)}) < \rho'_3$; 当 $n \geq 4$ 时, $\rho(D_{1,1,1}F_{1,n}^{(3)}) > \rho'_3$.

(c) 当 $m = 2, n = 4$ 时, 有 $z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = \beta$, 因此 $D_{1,1,2}F_{1,4}^{(3)}$ 是 β -正规的, 我们有 $\rho(D_{1,1,2}F_{1,4}^{(3)}) = \rho'_3$. 由引理2.2.3, 当 $n = 3$ 时, 我们的 $\rho_3 < \rho(D_{1,1,2}F_{1,3}^{(3)}) < \rho'_3$; 当 $n > 4$ 时, $\rho(D_{1,1,2}F_{1,n}^{(3)}) > \rho'_3$.

(d) 当 $m = 3$ 时, 如果 $n = 4$, 由于 $D_{1,1,2}F_{1,4}^{(3)}$ 是 β -正规的, 由引理2.2.14, 我们得 $D_{1,1,3}F_{1,4}^{(3)}$ 是严格 β -次正规的, 因此, $\rho_3 < \rho(D_{1,1,3}F_{1,4}^{(3)}) < \rho'_3$; 如果 $n = 5$,

有 $z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \approx 0.2432$, 因此 $D_{1,1,3}F_{1,5}^{(3)}$ 是 β -超正规的, 我们有 $\rho(D_{1,1,3}F_{1,5}^{(3)}) > \rho'_3$. 因此, 当 $m = 3, n = 3, 4$ 时, 我们得 $\rho_3 < \rho(D_{1,1,2}F_{1,n}^{(3)}) < \rho'_3$; 当 $n \geq 5$ 时, $(D_{1,1,2}F_{1,n}^{(3)}) > \rho'_3$.

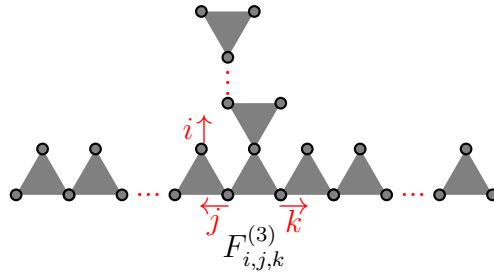
(e) 当 $m = 4$, 如果 $n = 5$, 有 $z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \approx 0.2462$, so $D_{1,1,4}F_{1,5}^{(3)}$ 是 β -次正规的, 我们有 $\rho(D_{1,1,4}F_{1,5}^{(3)}) < \rho'_3$; 如果 $n = 6$, 有 $z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \approx 0.2425$, 因此 $D_{1,1,4}F_{1,5}^{(3)}$ 是 β -超正规的, 我们有 $\rho(D_{1,1,4}F_{1,6}^{(3)}) > \rho'_3$. 因此, 由引理2.2.11 和引理2.2.3, 当 $m = 4, n = 3, 4, 5$ 时, 我们得 $\rho_3 < \rho(D_{1,1,4}F_{1,n}^{(3)}) < \rho'_3$; 当 $n \geq 6$ 时, 我们有 $\rho(D_{1,1,4}F_{1,n}^{(3)}) > \rho'_3$.

(f) When $m = 5$ 时, 如果 $n = 6$, 有 $z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = \beta$, 因此 $D_{1,1,5}F_{1,6}^{(3)}$ 是 β -正规的, 我们有 $\rho(D_{1,1,5}F_{1,6}^{(3)}) = \rho'_3$; 如果 $n = 3, 4, 5$, 由引理2.2.3, $\rho_3 < \rho(D_{1,1,4}F_{1,n}^{(3)}) < \rho'_3$; 如果 $n \geq 7$, 由引理2.2.3, 我们有 $\rho(D_{1,1,5}F_{1,n}^{(3)}) > \rho'_3$.

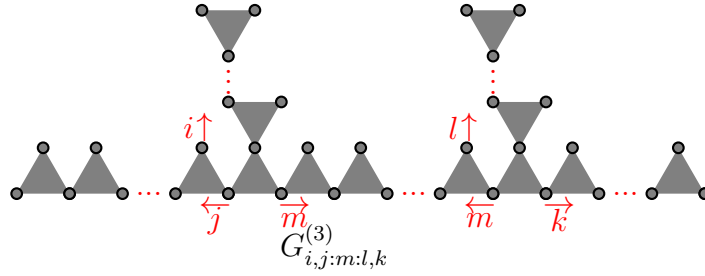
(g) 当 $m = 6$ 时, 如果 $n = 6$, 由于 $D_{1,1,5}F_{1,6}^{(3)}$ 是 β -正规的, 由引理2.2.14 我们得 $D_{1,1,6}F_{1,6}^{(3)}$ 是严格 β -次正规的, 因此, $\rho_3 < \rho(D_{1,1,6}F_{1,6}^{(3)}) < \rho'_3$; 如果 $n = 7$, 有 $z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \approx 0.2246$, 因此 $D_{1,1,6}F_{1,7}^{(3)}$ 是 β -超正规的, 我们有 $\rho(D_{1,1,6}F_{1,7}^{(3)}) > \rho'_3$. 因此, 由引理2.2.3, 当 $m = 6$ 时, 如果 $3 \leq n \leq 6$, 我们有 $\rho_3 < \rho(D_{1,1,6}F_{1,n}^{(3)}) < \rho'_3$; 如果 $n \geq 7$, 我们有 $\rho(D_{1,1,6}F_{1,n}^{(3)}) > \rho'_3$.

(h) 对任意 $m = n \geq 7$, 由于 $\rho_3 < \rho(D_{1,1,6}F_{1,6}^{(3)}) < \rho'_3$, 由引理4.2.3, 我们有 $\rho_3 < \rho(D_{1,1,n}F_{1,n}^{(3)}) < \rho'_3$. 由引理2.2.3, 当 $m \geq 7$ 且 $3 \leq n < m$ 时, 我们有 $\rho_3 < \rho(D_{1,1,n}F_{1,n}^{(3)}) < \rho'_3$. 另一方面, 由于 $\rho(D_{1,1,6}F_{1,7}^{(3)}) > \rho'_3$, 由引理4.2.3和引理2.2.3, 当 $m \geq 7$ 且 $n > m$ 时, 我们有 $\rho(D_{1,1,m}F_{1,n}^{(3)}) > \rho'_3$.

情形7. 我们用 $F_{i,j,k}^{(3)}$ 代表由连接在一条边每个节点上长度分别为 i, j, k 的路径形成的3-一致超图.

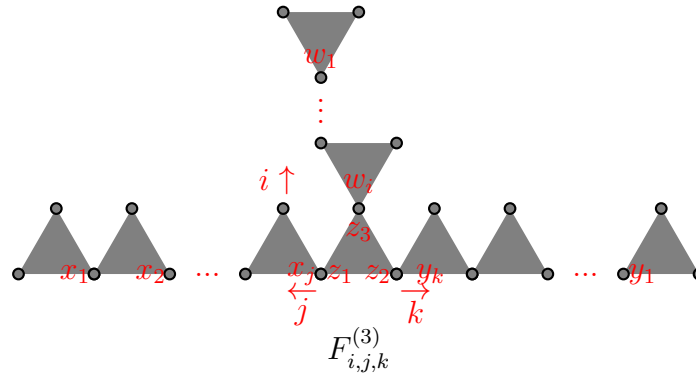


用 $G_{i,j:l,k}^{(3)}$ 表示由连接在一条长度为 $m + 2$ 的路径的端点节点上的长度分别为 i, j, l, k 的4条路径形成的3-一致超图.



现在, 我们假定 H 中节点的度至多为2. 根据分支边的数目, 我们考虑以下情况:

1. 如果 H 不含分支边, 那么 H 是一条路径, 我们有 $\rho(H) < \rho_3$.
2. 如果 H 仅含一条分支边, 那么 $H = F_{i,j,k}^{(3)}$. 我们对此图标号如下:



令 $x_1 = y_1 = w_1 = \beta$, $x_j = f^{j-1}(\beta)$, $y_k = f^{k-1}(\beta)$, $w_i = f^{i-1}(\beta)$, $z_1 = 1 - x_j = 1 - f^{j-1}(\beta)$, $z_2 = 1 - y_k = 1 - f^{k-1}(\beta)$, $z_3 = 1 - w_i = 1 - f^{i-1}(\beta)$. 那么, 我们考虑:

(a) 当 $i = 1, j, k \rightarrow \infty$, 由引理4.2.1, 我们得 $\rho(F_{1,\infty,\infty}) = \rho'_3$. 由于 $\rho(F_{1,5,6}) = \rho(F_{1,4,8}) = \rho(F_{1,3,14}) = \rho_3$, 当 $i = 1, j = 5, k > 6$, 或 $i = 1, j > 5, k \geq 6$, 或 $i = 1, j = 4, k > 8$, 或 $i = 1, j > 4, k \geq 8$, 或 $i = 1, j = 3, k > 14$, or $i = 1, j > 3, k \geq 14$ 时, 我们有 $\rho_3 < \rho(F_{i,j,k}) < \rho'_3$.

(b) 当 $i = j = 2, k \rightarrow \infty$ 时, 由引理2.2.14, 令 $y_k = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} - \varepsilon$, $z_2 = 1 - y_k = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} + \varepsilon$. 我们可以验证 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 > z_1 \cdot z_3 \cdot \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} \approx 0.2599 > \beta$, 因此, 我们得 $\rho(F_{2,2,\infty}) < \rho'_3$. 因此, 由 $\rho(F_{2,2,7}) = \rho_3$, 对 $k \geq 8$, 我们得 $\rho_3 < \rho(F_{2,2,k}) < \rho'_3$.

当 $i = 2, j = 3$ 时, 我们考虑 $\rho(F_{2,3,k})$. 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 令 $z_2 = 1 - y_k = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} + \varepsilon$, 有 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 > z_1 \cdot z_3 \cdot \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} = \beta$. 由 $\rho(F_{2,3,4}) = \rho_3$, 对于 $k \geq 5$, 我们得 $\rho_3 < \rho(F_{2,3,k}) < \rho'_3$ for any.

当 $i = 2, j = 4$ 时, 如果 $k = 6$, 有 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \approx 0.2462 > \beta$; if $k = 7$, 我们可以验证 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \approx 0.2436 < \beta$. 由 $\rho(F_{2,3,4}) = \rho_3$, 对于 $4 \leq k \leq 6$, 我们得 $\rho_3 < \rho(F_{2,4,k}) < \rho'_3$.

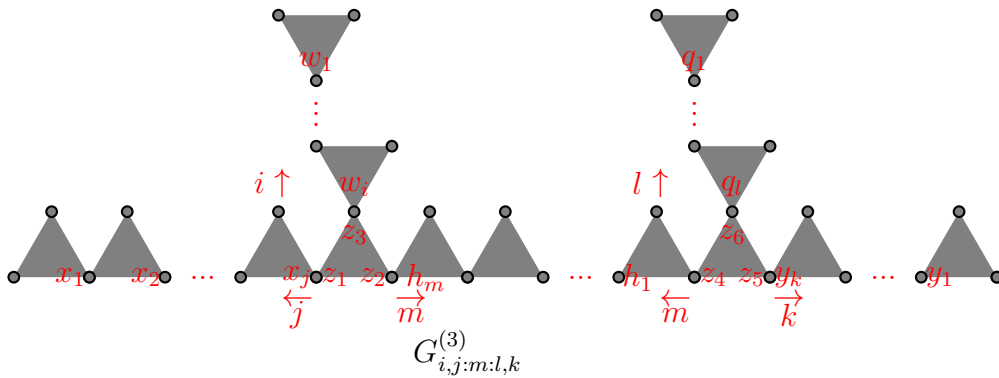
当 $i = 2, j = 5$ 时, 如果 $k = 5$, 有 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \approx 0.2444 < \beta$. 因此, 我们得 $\rho(F_{2,5,5}) > \rho'_3$. 因此, 当 $i = 2, k \geq j \geq 5$ 时, 由引理 2.2.3, 我们有 $\rho(F_{2,j,k}) > \rho'_3$.

(c) 当 $i = 3$ 时, 如果 $j = 3, k = 4$, 有 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \approx 0.2496 > \beta$; if $j = 3, k = 5$, 我们可以验证 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \approx 0.2441 < \beta$. 由 $\rho(F_{3,3,3}) > \rho_3$, 对于 $k = 3, 4$, 我们得 $\rho_3 < \rho(F_{3,3,k}) < \rho'_3$; 对于 $k \geq 5$, 我们得 $\rho(F_{3,3,k}) > \rho'_3$.

当 $i = 3$ 时, 如果 $j = 4, k = 4$, 有 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \approx 0.2411 < \beta$. 因此, 当 $i = 3$ 时, 如果 $k \geq j \geq 4$, 我们有 $\rho(F_{3,j,k}) > \rho'_3$.

(d) 当 $i = 4$ 时, 如果 $j = 4, k = 4$, 有 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \approx 0.2328 < \beta$. 因此, 当 $k \geq j \geq i \geq 4$, 我们有 $\rho(F_{i,j,k}) > \rho'_3$.

3. 如果 H 正好包含两个分支边, 那么 $H = G_{i,j:m:l,k}^{(3)}$ ($i \leq j, l \leq k$). 我们对此图标号如下:



令 $x_1 = y_1 = w_1 = q_1 = \beta$, $x_j = f^{j-1}(\beta)$, $y_k = f^{k-1}(\beta)$, $w_i = f^{i-1}(\beta)$, $q_l = f^{l-1}(\beta)$, $z_1 = 1 - x_j = 1 - f^{j-1}(\beta)$, $h_1 = \frac{\beta}{1-z_4}$, $h_s = \frac{\beta}{1-h_{s-1}}$ ($2 \leq s \leq m$), $z_2 = 1 - h_m$, $z_3 = 1 - w_i = 1 - f^{i-1}(\beta)$, $z_5 = 1 - y_k = 1 - f^{k-1}(\beta)$,

$$z_6 = 1 - q_l = 1 - f^{l-1}(\beta), z_4 = \frac{\beta}{z_5 \cdot z_6}.$$

首先, 我们假设 $i \neq 1$ 且 $l \neq 1$, 考虑如下情况:

(a) 当 $i + j = 5$ 且 $l + k = 3$ 时, 亦即 $i = 2, j = 3, l = 1, k = 2$. 我们计算得 $z_4 = \frac{\beta}{1-2\beta} = f(2\beta)$. 因此, 令 $h_1 = f^2(2\beta)$, $h_m = f^{m+1}(2\beta)$. 由于 $\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} < 2\beta < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 由引理2.2.14, 我们得 h_m 关于 m 单调递减, $z_2 = 1 - h_m$ 关于 m 单调递增. 因此, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 我们得 $h_m = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} + \varepsilon$, $z_2 = 1 - h_m = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} - \varepsilon$. 我们可以验证 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 < z_1 \cdot z_3 \cdot \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} = \beta$. 因此, 对任意 $m \geq 0$, 我们得 $\rho(G_{2,3:m:1,2}) > \rho'_3$. 因此, 对任意 $m \geq 0, i + j \geq 5$, 且 $l + k \geq 3$, 我们有 $\rho(G_{i,j:m:l,k}) > \rho'_3$.

(b) 当 $i + j = 5$ 且 $l + k = 2$ 时, 即 $i = 2, j = 3, l = 1, k = 1$. 计算得 $z_4 = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$. 由于 $\frac{\beta}{(1-\beta)^2} = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 我们得 $h_m = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. So, $z_2 = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 我们可以验证 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \beta$. 因此, 对任意 $m \geq 0$, 我们有 $\rho(G_{2,3:m:1,1}) = \rho'_3$.

(c) 当 $i + j = 4$ 且 $l + k = 4$ 时, 如果 $i = 2, j = 2, l = 2, k = 2$, 我们得 $z_4 = \frac{\beta(1-\beta)^2}{(1-2\beta)^2}$, 有 $\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} \approx 0.4302 < z_4 \approx 0.5375 < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} \approx 0.5698$. 由引理2.2.14, 知 h_m 关于 m 单调递减. 当 $m = 8$ 时, $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \approx 0.2433 < \beta$, 当 $m = 9$ 时, $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \approx 0.2465 > \beta$. 因此, 对任意 $m \geq 9$, 我们得 $\rho(G_{2,2:m:2,2}) < \rho'_3$, 对任意 $0 \leq m < 9$, 有 $\rho(G_{2,2:m:2,2}) > \rho'_3$. 如果 $i = 2, j = 2, l = 1, k = 3$, 由 $z_4 = 0.5098$, 我们可以得到与 $\rho(G_{2,2:m:2,2})$ 相同的结果, 亦即, 对任意 $m \geq 9$, 我们有 $\rho(G_{2,2:m:1,3}) < \rho'_3$, 对任意 $0 \leq m < 9$, 有 $\rho(G_{2,2:m:1,3}) > \rho'_3$.

(d) 当 $i + j = 4$ 且 $l + k = 3$ 时, 即 $i = 2, j = 2, l = 1, k = 2$, 由 $z_4 = \frac{\beta}{1-2\beta} = f(2\beta)$, 我们得 $h_m = f^{m+1}(2\beta)$. 由引理2.2.14, 我们得 h_m 关于 m 单调递减, $z_2 = 1 - h_m$ 关于 m 单调递增. 因此, 当 $m = 1$ 时, $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \approx 0.2442 < \beta$, 当 $m = 2$ 时, $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \approx 0.2473 > \beta$. 因此, 对任意 $m \geq 2$, 我们得 $\rho(G_{2,2:m:1,2}) < \rho'_3$; 对任意 $0 \leq m < 2$, 有 $\rho(G_{2,2:m:1,2}) > \rho'_3$.

(e) 当 $i + j = 4$ 且 $l + k = 2$ 时, 即 $i = 2, j = 2, l = 1, k = 1$, 由 $\rho(G_{2,3:m:1,1}) = \rho'_3$, 由引理2.2.3, 我们得 $\rho(G_{2,2:m:1,1}) < \rho'_3$.

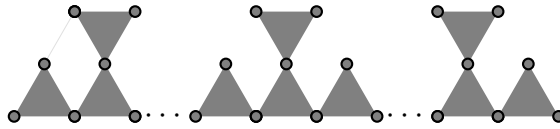
当 $i + j \leq 3$ 且 $l + k \leq 3$ 时, 即为下列情形的特殊情况:

现在, 我们考虑 $i = l = 1$. 当 $j = 1$ 时, 令 $x_1 = y_1 = w_1 = q_1 = \beta$, $z_1 = z_3 = z_6 = 1 - \beta$, $z_2 = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$. 由于 $\frac{\beta}{(1-\beta)^2} = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 得 $z_4 = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $z_5 = 1 - y_k = 1 - f^{k-1}(\beta) = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} + \varepsilon$. 我们可以验证 $z_4 \cdot z_5 \cdot z_6 < (1 - \beta)(\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})^2 = \beta$. 因此, 对任意 $m \geq 0, k \geq 1$, 我们有 $\rho(G_{1,1:m:1,k}) < \rho'_3$. 由 $\rho(G_{1,1:0:1,4}) = \rho_3$ 和 $\rho(G_{1,1:6:1,3}) = \rho_3$, 因此, 如果 $\rho_3 < \rho(G_{1,1:m:1,k}) < \rho'_3$, 我们有 $m \geq 0, k \geq 5$, 或 $m > 0, k = 4$, 或 $m \geq 7, k \geq 3$. 当 $j = 2$, 由 $z_2 = \frac{\beta}{1-2\beta} = f(2\beta)$, 我们有与情形6中的6条相同的结果. 当 $j \geq 3$ 时, 如果 $\rho(G_{1,j:m:1,k}) < \rho'_3$, 对 $j = 3, 4, 5, 6$, 和 $k = 3, 4, \dots, 25$, 我们可得下列表格, 此表格中, 数字代表 m 可取得的最小值.

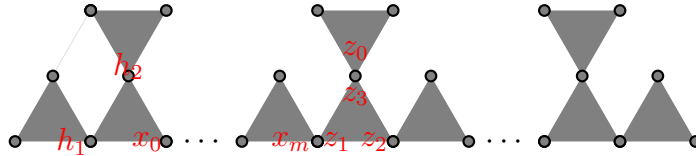
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
3	2	4	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	20	21	22	22	23	23	24
4		6	8	9	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	22	23	24	24	25	25	26
5			10	11	12	14	15	16	17	18	19	20	21	22	22	23	24	25	25	26	27	27	27
6				12	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27	28	28	29

表 4.1:

4. H 至少包含3条分支边. 由于所有节点的度至多为2, 所有分支边躺在同一路径上. 我们考虑 $G_{1,1:m:1:n:1,1}$:



我们对此图标号如下,



令 $h_1 = h_2 = z_0 = \beta$, $x_0 = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$, $z_3 = 1 - \beta$. 由于 $\frac{\beta}{(1-\beta)^2} = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 我们得 $x_m = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 因此, $z_1 = 1 - x_m = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 由对称性, 令 $z_2 = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$.

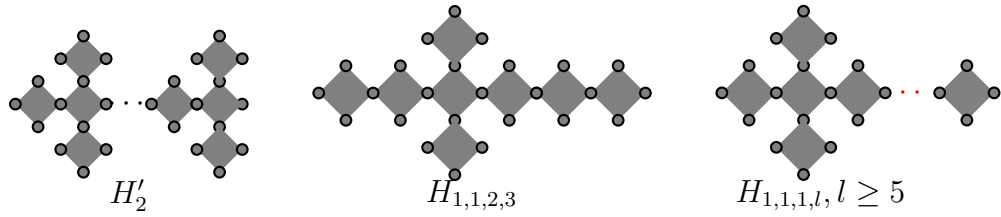
我们可以验证 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = \beta$. 因此, 对任意 $m \geq 0, n \geq 0$, 有 $\rho(G_{1,1:m:1:n:1,1}) = \rho'_3$. 如果 H 包含 $G_{1,1:m:1:n:1,1}$, 那么 $\rho(H) > \rho(G_{1,1:m:1:n:1,1}) = \rho'_3$.

综上, 所有谱半径 $\rho(H)$ 满足 $\rho_3 < \rho(H) \leq \rho'_3$ 的超图都在定理4.2.4的列表中. $\square$

4.2.3 r -一致超图

对任意整数 $r \geq 2$, 令 $\rho'_r = (r-1)!\beta^{-\frac{1}{r}}$. 在这一节, 令 H 为 r -一致超图, $r \geq 4$, 我们对所有谱半径 $\rho(H)$ 满足 $\rho_r < \rho(H) \leq \rho'_r$ 的 r -一致超图进行分类. 首先由推论4.1.6, 我们可以对定理4.2.4 中的超图进行扩展. 那么, 除此之外, 还有哪些超图 H 的谱半径 $\rho(H)$ 满足 $\rho_r < \rho(H) \leq \rho'_r$ 呢?

定理4.2.5 对于 $r \geq 5$, 每一个谱半径至多为 ρ'_r 的 r -一致超图是可约的. 对于 $r = 4$, 谱半径在区间 $(\rho_r, \rho'_r]$ 内的不可约超图如下:



证明. 令 H 为 r -一致超图满足 $\rho_r < \rho(H) \leq \rho'_r$.

1. 如果 H 不是简单的, 那么 H 包含一个字图, 这个字图有两条边相交于 $s \geq 2$ 个节点. 称这个子图为 $G_s^{(r)}$. 定义 $G_s^{(r)}$ 的加权关联矩阵 B 如下: 对任意节点 v 和边 e (另外的边为 e'),

$$B(v, e) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{如果 } v \in e \cap e', \\ 1 & \text{如果 } v \in e \setminus e', \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

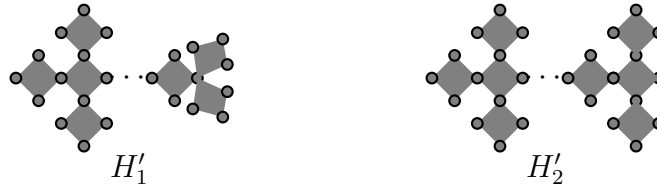
容易验证当 $s \geq 3$ 时, 我们有 $(\frac{1}{2})^s < \beta$, 因此 $G_s^{(r)}$ 一致 β -超正规且 $\rho(H) > \rho'_r$. 当 $s = 2$ 时, $G_s^{(r)}$ 可约为 $C_n^{(3)+}$. 因此, 如果 H 包含 $G_s^{(r)}$, 有 $\rho(H) > \rho'_r$.

2. 现在我们假设 H 是简单的. 如果 H 不是超树, 那么 H 包含一个圈. 令 $C_l = v_0 e_1 v_1 e_1 \cdots v_{l-1} e_l v_0$ 为 H 中长度最小的圈. 注意到在 C_l 的边 e_i 中, 除了 v_{i-1}

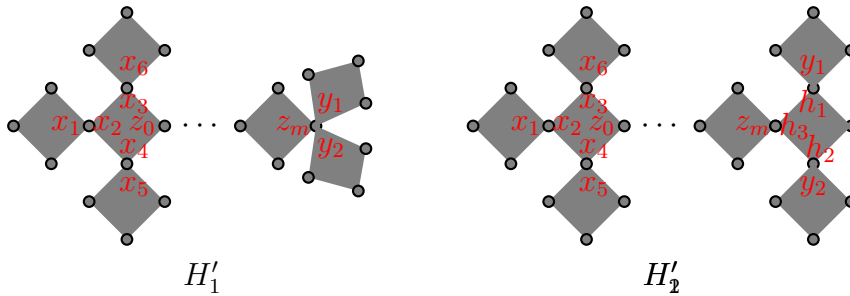
和 v_i 外, 其它节点都是叶节点. 这个圈与 $C_l^{(r)+}$ 等价, 且 $C_l^{(r)+}$ 是 β -超正规的. 我们有

$$\rho(H) > \rho(C_l^{(r)+}) > \rho'_r.$$

3. 最后, 我们假设 H 是一个超树. 我们假设 H 是不可约的. 存在一条边, 称为 $F_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ 使得对于 $i = 1, 2, \dots, r$, 每一个节点 v_i 在另外一条边 F_i 中. 包含边 $F_0, F_1, \dots, F_r$ 的超图称为星状图, 用 $S_r^{(r)}$ 表示. 在边 F_i 中, 我们令 $B(v_i, F_i) = \frac{1}{4}$, $B(v_i, F_0) = \frac{3}{4}$, 且对每一个 $v \neq v_i$, $B(v, F_i) = 1$. 由于对于 $r \geq 5$, $\prod_{i=1}^r B(e_i, F_0) = (\frac{3}{4})^r < 0.2373 < \beta$, 因此, 对于 $r \geq 5$, $S_r^{(r)}$ 是 $\frac{1}{4}$ -超正规的. 我们有 $\rho(H) \geq \rho(S_r^{(r)}) > \rho'_r$. 矛盾! 因此, 对于 $r \geq 5$, 每一个谱半径至多为 ρ'_r 的 r -一致超图是可约的.
4. 我们考虑 $r = 4$. 我们首先可证, 去掉边 F_0 后, 4个分支都必须是路径. 否则, 如果任一个分支包含一个分支节点或分支边, 那么 H 包含下面的子图 H'_1 或 H'_2 :



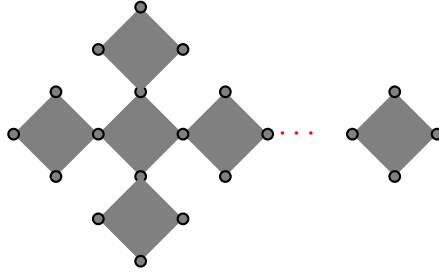
我们对 H'_1 和 H'_2 标号如下,



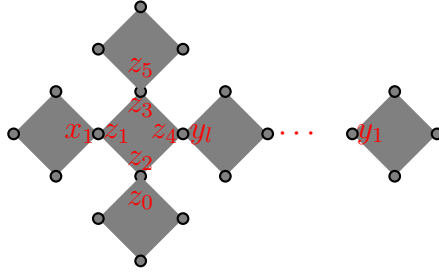
在 H'_1 和 H'_2 中, 令 $x_1 = x_5 = x_6 = y_1 = y_2 = \beta$, $x_2 = x_3 = x_4 = h_1 = h_2 = 1 - \beta$, $h_3 = \frac{\beta}{(1-\beta)^2} = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$, $z_0 = \frac{\beta}{(1-\beta)^3}$, 我们可以验证 $\frac{\beta}{(1-\beta)^3} = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 由引理2.2.14, 得 $z_m = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 在 H'_1 中, 易得 $y_1 + y_2 + z_m \approx 1.0601 > 1$,

令 $x_1 = y_1 = z_0 = z_5 = \beta$, $x_2 = f(\beta)$, $z_1 = \frac{1-2\beta}{1-\beta}$, $z_2 = z_3 = 1 - \beta$, $y_l = f^{l-1}(\beta)$, $z_4 = 1 - y_l$. 当 $l = 3$ 时, 我们可以验证 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = \beta$. 因此, $\rho(H_{1,1,2,3}) = \rho'_3$. 当 $l = 4$, 易知 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \approx 0.2367 < \beta$. So, $\rho(H_{1,1,2,4}) > \rho'_r$. 由于 $\rho(H_{1,1,2,2}) = \rho_r$, 仅当 $l = 3$ 时, $\rho_r < \rho(H_{1,1,2,3}) = \rho'_r$.

当 $i = j = k = 1$, 下图表示 $H_{1,1,1,l}$,



我们对此图标号如下,



令 $x_1 = y_1 = z_0 = z_5 = \beta$, $z_1 = z_2 = z_3 = 1 - \beta$, $y_l = f^{l-1}(\beta)$, $z_4 = 1 - y_l$. 当 $l \rightarrow \infty$, 由引理4.2.1, 令 $y_l = \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} - \varepsilon$, $z_4 = 1 - y_l = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} + \varepsilon$. 我们可以验证 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 > z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2} = \beta$. 由于 $\rho(H_{1,1,1,4}) < \rho_4$ 和 $\rho(H_{1,1,1,5}) > \rho_4$, 对于 $l \geq 5$, 有 $\rho_r < \rho(H_{1,1,1,l}) < \rho'_r$.

因此, 所有谱半径在区间 $(\rho_r, \rho'_r]$ 内的超图都在定理4.2.5的列表中. $\square$

由推论4.1.6, 定理4.2.5 和定理4.2.4, 我们有下列定理:

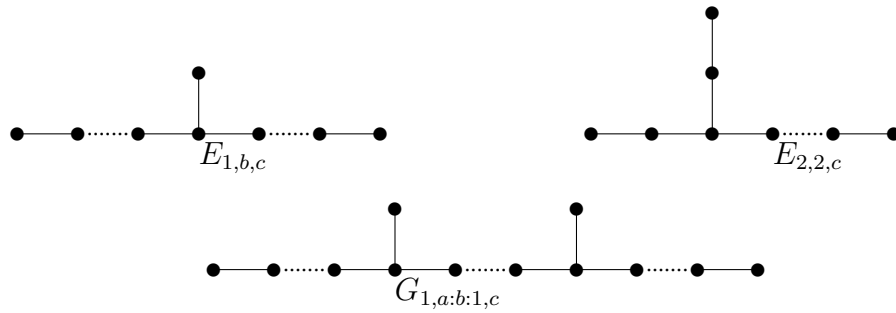
定理4.2.6 令 $r \geq 4$, $\rho_r = (r-1)!\sqrt[4]{4}$. 如果 r -一致超图 H 的谱半径在区间 $(\rho_r, \rho'_r]$ 内, 那么 H 是下列图形中的一种:

1. 由定理4.2.4中的超图经过 $r-3$ 次扩展而得到的 r -一致超图.
2. 由定理4.2.5中的超图经过 $r-4$ 次扩展而得到的 r -一致超图.

4.3 对谱半径至多为 $(r-1)!\sqrt[2]{2+\sqrt{5}}$ 的一致超图结构的研究

4.3.1 研究现状及主要定理

Cvetković et al. [27]对谱半径 $2 < \rho(G) < \sqrt{2+\sqrt{5}}$ 的图给出了近乎完整的分类, Brouwer 和Neumaier [22]给出了完全完整的分类, 亦即: $E_{1,b,c}$ ($b = 2, c \geq 6$ 或 $b \geq 3, c \geq 4$), $E_{2,2,c}$ ($c \geq 3$), 和 $G_{1,a:b:1,c}$ ($a \geq 3, c \geq 2, b > a+c$)



Wang et al. [62]研究了谱半径接近 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 的图。Woo and Neumaier [63] 证明了谱半径为 $\sqrt{2+\sqrt{5}} < \rho(G) < \frac{3}{2}\sqrt{2}$ 的图为下面的图形:

1. 如果图 G 的节点的最大度至少为4, 那么图 G 为形如匕首状的图形, 亦即, S_5 。
2. 如果图 G 是一个树, 且节点的最大度为3, 那么 G 是一个开基普, 亦即所有度数为3的节点躺在同一个路径上。
3. 如果 G 包含一个圈, 那么 G 是一个闭基普, 亦即, G 是节点度数最多为3的单圈图, 且度数为3的节点躺在圈上。

在这一节, 我们研究谱半径至多为 $(r-1)!\sqrt[2]{2+\sqrt{5}}$ -一致超图 H 的形状, 得到这样的超图必须有一个基普结构, 这一结论与Woo-Neumaier, Graphs Combin.在2007年对谱半径至多为 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 的图的分类结果有很大相似性。

我们先叙述一下两个重要概念。对于 $k \geq 3$, 如果一个节点 v 在 k 条边内, v 被称为 k -分支节点; 如果一条边 e 不包含分支节点, 但是与 k 条边相连, 边 e 被称为 k -分支边。当 $k = 3$ 时, 为了简, 我们说分支边/节点, 而不说3-分支边/节点。我们的主要定理如下:

定理4.3.1 对于一个不可约的3-一致连通超图 H , 如果它的谱半径满足 $\rho(H) \leq 2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, 那么, 超图 H 的节点的度不能超过3, 且 H 的结构属于下面两类中的一类:

开3-基普: H 是一个超树, 所有的分支节点和分支边同在同一条路径上, 至多有两个分支节点, 而且, 任一个分支节点不能在任两个分支边之间, 或一个分支边和一个分支节点之间。

闭3-基普: H 包含一个圈 C 且没有分支节点. 所有的分支边只能存在于圈 C 上, 而且每一个分支边只能连接一条路径。

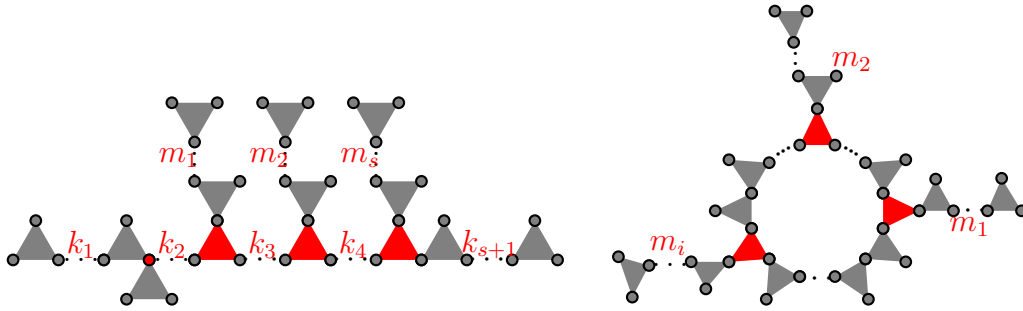


图 4.2: (例子) 左边: 一个开3-基普, 分支节点/边的颜色为红色. 右边: 一个3-闭基普, 分支边为红色.

定理4.3.2 设 H 是不可约的4-一致超图, 谱半径为 $\rho(H) \leq 6\sqrt[4]{2+\sqrt{5}}$. 那么 H 是一个超树, H 的节点的度不能超过3, 与 H 的每条边相连的边不能超过4, 且 H 的结构属于下面两类中的一类:

开4-基普: H 是一个超树, 所有的分支节点和分支边同在同一条路径上, 至多有两个分支节点和两个4-分支边, 而且, 任一个4-分支边或分支节点不能在任两个3-分支边之间, 或一个分支边和一个4-分支边 (或分支节点之间)。另外, 每一个4-分支边被3条长度分别为1, 1, and k ($k = 1, 2, 3$)的路径连接。

4-dagger: H 为由一个4-分支边被4条长度分别为 i, j, k, l 的路径连接形成的超图, 用 $H_{i,j,k,l}^{(4)}$ ($i \leq j \leq k \leq l$) 表示. H 为下列超图中的一种: $H_{1,2,2,2}^{(4)}$, $H_{1,2,2,3}^{(4)}$, $H_{1,1,4,4}^{(4)}$, $H_{1,1,4,5}^{(4)}$, 和 $H_{1,1,k,l}^{(4)}$ ($1 \leq k \leq 3$, 且 $k \leq l$).

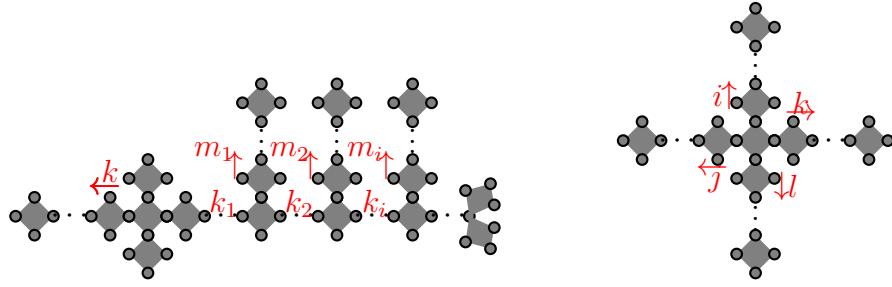
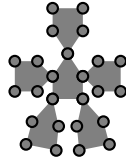


图 4.3: (例子) 左边: 一个开4-基普. 右边: 一个4-dagger $H_{i,j,k,l}^{(4)}$.

定理4.3.3 对于 $r = 5$, 仅有一个不可约的5-一致超图 H 满足 $\rho(H) \leq (r - 1)! \sqrt[r]{2 + \sqrt{5}}$, 亦即, 5-星状一致超图, 如下:



对于 $r \geq 6$, 所有满足 $\rho(H) \leq (r - 1)! \sqrt[r]{2 + \sqrt{5}}$ 的 r -一致超图 H 是可约的.

4.3.2 引理

定义4.3.4 给定两个 r -一致超图 H_1 和 H_2 , 从 H_1 到 H_2 的一个同态是指由图 H_1 的节点集到图 H_2 的节点集内的一个映射 $f: V(H_1) \rightarrow V(H_2)$, 使得 H_1 的任意两个相邻节点所对应的 H_2 的两个节点也相邻. 如果 f 是一个单射, 仍用 f 表示, 从 $E(H_1)$ 到 $E(H_2)$, 那么 f 被称做是一个子同态. 此时, 我们也称 H_1 是 H_2 的一个子同态型.

每一个子超图是一个子同态型. 设 v_1 和 v_2 是 H 的两个节点, 这两个节点不同时在任意一条边内. 我们可以将 v_1 和 v_2 合并成一个节点 x , 从而由 H 得到一个新图 H' . 设映射 $f: V(H) \rightarrow V(H')$ 将 v_1 和 v_2 合并, 同时也对其它节点做同样的映射, 那么 f 被称为子同态.

引理4.3.5 设 H_1 和 H_2 是两个连通的 r -一致超图. 如果 H_1 是 H_2 的一个子同态型, 那么我们有

$$\rho(H_1) \leq \rho(H_2)$$

等号成立当且仅当 H_1 与 H_2 是同构的.

证明. 设 $f: V(H_1) \rightarrow V(H_2)$ 为一个子同态. 令 $\alpha = \left(\frac{(r-1)!}{\rho(H_2)}\right)^r$, 由引理2.2.5, H_2 是一致 α -正规的. 令 B_2 为 H_2 的关联矩阵. 我们可以定义 H_1 的关联矩阵 B_1 如下:

$$B_1(v, e) = B_2(f(v), f(e)) \quad \text{对任意 } v \in V(H_1) \text{ 和 } e \in E(H_1).$$

对任意固定的 $e \in E(H_1)$, 有

$$\prod_{v \in e} B_1(v, e) = \prod_{v' \in f(e)} B_2(v', f(e)) = \alpha.$$

对于任意固定的 $v \in V(H_1)$, 集合 $\{e \in E(H_1): v \in e\}$ 是集合 $\{e \in E(H_1): f(v) \in f(e)\}$ 的子集. 由于 $f(e)$ 被 e 唯一决定, 后面的集合与 $\{e' \in E(H_2): f(v) \in e'\}$ 是一一对应的. 所以有

$$\sum_{e: v \in e} B_1(v, e) \leq \sum_{e': f(v) \in e'} B_2(f(v), e') = 1.$$

因此, H_1 是 α -次正规的. 我们有 $\rho(H_1) \leq \rho(H_2)$. 当等号成立时, $f(H_1) = H_2$ (否则 $\rho(H_1) \leq \rho(f(H_1)) < \rho(H_2)$), 对任意 $v \in V(H_1)$ 和 $e \in E(H_1)$, $v \in e$ 当且仅当 $f(v) \in f(e)$. 所以 f 必须是一个单射, (否则, 我们有 $f(v_1) = f(v_2)$, 我们可以找到边 e_1 包含 v_1 . 由于 f 是同态, v_2 不在边 e_1 中, 但是 $f(v_2) = f(v_1) \in f(e_1)$, 矛盾.) 因此, f 是一个同态. $\square$

引理4.3.6 令 $f_\beta(x) = \frac{\beta}{1-x}$ 且 $f_\beta^n(x) = f_\beta(f_\beta^{n-1}(x))$ ($n \geq 2$), 那么对任意正整数 n , 和任意实数 $\beta \in (0, \frac{1}{4})$, 存在唯一的 $x \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$ 使得 $f_\beta^n(x) = 1 - x$.

证明. 考虑函数 f 的集合 $\mathcal{F}$, 其中 f 满足:

1. f 在 $(\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$ 中是连续的单调增函数.
2. $\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$ 和 $\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$ 是 f 的临界点.

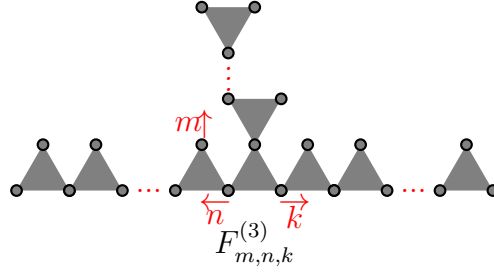
因为 $g(x) := f(x) + x$ 在 $(\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$ 中是连续的严格增函数, 且

$$g\left(\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}\right) = 1 - \sqrt{1-4\beta} < 1, \quad \text{and} \quad g\left(\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}\right) = 1 + \sqrt{1-4\beta} > 1.$$

我们有, 对任意的 $f \in \mathcal{F}$, 存在唯一的 $x \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$ 使得 $f(x) = 1 - x$. 对任意正整数 m , 我们证明 $f_\beta^m(x) \in \mathcal{F}$. 当 $m = 1$, 我们得 $f_\beta^1(\beta) =$

$f_\beta(\beta) \in \mathcal{F}$. 现在我们假设 $f_\beta^m \in \mathcal{F}$. 由于 f_β 和 f_β^m 都是连续单调递增的且将 $(\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$ 映射为 $(\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$, $f_\beta \circ f_\beta^m = f_\beta^{m+1}$ 亦如此, 所以我们完成证明. $\square$

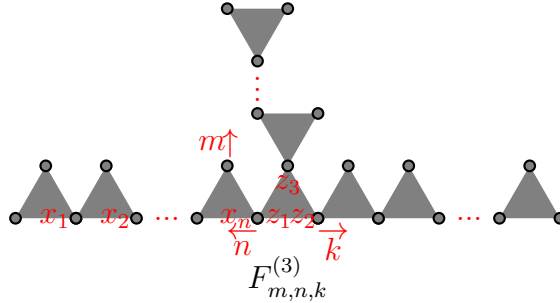
引理4.3.7 令下图表示 $F_{m,n,k}^{(3)}$,



and the spectral radius of $F_{m,n,k}^{(3)}$ be $\rho(F_{m,n,k}^{(3)})$. Then, when $m, n, k \rightarrow \infty$,

$$\lim_{m,n,k \rightarrow \infty} \rho(F_{m,n,k}^{(3)}) = 2\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}.$$

证明. We label this graph as follows



设 $\beta \in (0, \frac{1}{4})$ 为一个实数. 令 $z_1 = 1 - x_n = 1 - f_\beta^{n-1}(\beta)$, $z_2 = 1 - f_\beta^{k-1}(\beta)$, $z_3 = 1 - f_\beta^{m-1}(\beta)$. 设 $\beta_{m,n,k}$ 为

$$z_1 z_2 z_3 = \beta.$$

的解. 我们得到一个 $\beta_{m,n,k}$ -正规标号. 因此, $\rho(F_{m,n,k}^{(3)}) = 2\beta_{m,n,k}^{-1/3}$. 由引理2.2.14的第一条, 对固定的 β , z_i 单调递减且趋于 $\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 我们得 $\beta_{m,n,k}$ 关于 m, n , 和 k 单调递减. 所以 $\lim_{m,n,k \rightarrow \infty} \beta_{m,n,k}$ 存在且是

$$\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2}\right)^3 = \beta.$$

的一个解. 通过简单计算, 我们得 $\beta = \sqrt{5} - 2$. 由引理 2.2.8, 我们得 $\lim_{m,n,k \rightarrow \infty} \rho(F_{m,n,k}^{(3)}) = 2\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$. $\square$

令 $\rho'_r = (r-1)! \sqrt[r]{2 + \sqrt{5}}$, 我们有下面引理.

引理 4.3.8 对于 $r \geq 3$, 令 H 为一个 r -一致超图, 谱半径为 $\rho(H) \leq \rho'_r$. 如果 H 不是简单的, 那么 $H = C_2^{(r)}$, 其中 $C_2^{(r)}$ 是一个 r -一致超图且有两条边含有两个相同节点.

证明. 在文 [64] 中, 我们已经得到 $\rho_r(C_2^{(r)}) = (r-1)! \sqrt[r]{4} < \rho'_r$.

由于 H 不是简单的, H 包含两条边 F_1 和 F_2 具有 s 个相同节点, 这里 $s \geq 2$.

如果 $s \geq 3$, 称包含 F_1, F_2 的超图为 $C_{s+}^{(r)}$. 定义 $C_{s+}^{(r)}$ 的加权矩阵 B 如下: 对任意节点 v 和边 e (其它为 e'),

$$B(v, e) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{如果 } v \in e \cap e', \\ 1 & \text{if } v \in e \setminus e', \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

易知当 $s \geq 3$ 时, 我们有 $(\frac{1}{2})^s < 0.1251 < \beta$, 因此 $C_{s+}^{(r)}$ 是一致 β -超正规的, 所以 $\rho(H) \geq \rho(C_{s+}^{(r)}) > \rho'_r$. 矛盾! 由此, F_1 和 F_2 仅能有 2 个共同节点. 如果 H 是连通的且 $H \neq C_2^{(r)}$, 那么有第 3 条边 F_3 与 $F_1 \cup F_2$ 有共同节点. 由于合并节点不改变子同态型性质, 我们只需要考虑两种子同态型: $C_{2+}^{(r)}$ 和 $C'_{2+}^{(r)}$. 这里超图 $C_{2+}^{(r)}$ 和 $C'_{2+}^{(r)}$ 都包含 3 条边 F_1, F_2, F_3 , 且 $|F_1 \cap F_2| = 2$, $|F_3 \cap (F_1 \cup F_2)| = 1$. 不同的是在 $C_{2+}^{(r)}$ 中, $F_3 \cap (F_1 \cup F_2) \in F_1 \cap F_2$ 而在 $C'_{2+}^{(r)}$ 中, $F_3 \cap (F_1 \cup F_2) \in F_1 \Delta F_2$. 下面是图形 $C_{2+}^{(3)}$ 和 $C'_{2+}^{(3)}$:



我们首先证明 $\rho_r(C_{2+}^{(r)}) > \rho'_r$ 和 $\rho_r(C'_{2+}^{(r)}) > \rho'_r$, by Lemma 4.3.5, 易知 $\rho(H) > \rho'_r$. 由于 $C_{2+}^{(r)}$ 由 $C_{2+}^{(3)}$ 扩展得到, $C'_{2+}^{(r)}$ 由 $C'_{2+}^{(3)}$ 扩展得到. 我们只需要证明 $C_{2+}^{(3)}$ 和 $C'_{2+}^{(3)}$ 是一致严格 β -超正规的. 我们对这两个图形标号如下:



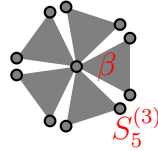
在 $C_{2+}^{(3)}$ 中, 令 $y_1 = \beta$, $y_2 = y_3 = \frac{1-\beta}{2}$, $y_4 = y_5 = \frac{2\beta}{1-\beta}$. 由于 $y_4 + y_5 \approx 1.2361 > 1$, 所以这是一个一致严格 β -超正规标号.

在 $C'_{2+}^{(3)}$ 中, 令 $x_1 = \beta$, $x_2 = 1 - \beta$, $x_3 = x_6 = \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}$, $x_4 = x_5 = \sqrt{\beta}$. 由 $x_3 + x_4 = x_5 + x_6 \approx 1.0418 > 1$, 这仍是一个一致严格 β -超正规标号. $\square$

4.3.3 定理4.3.1的证明

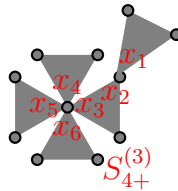
证明. 我们只需要考虑不可约的一致超图. 假设 H 是谱半径 $\rho(H) \leq 2\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ 的不可约的3-一致超图, 我们首先排除 H 所不可能具有的结构. 这所用到的方法是证明包含所不可能具有的结构子超图 H' 具有 $(\sqrt{5} - 2)$ -超正规标号 (如果 H' 不是超树, 则需要证明标号是一致的). 为简化起见, 在证明过程中我们令 $\beta = \sqrt{5} - 2$. 由引理4.3.8, 当 $r = 3$ 时, 我们只需要考虑 H 是简单超图.

情形1. 如果存在 $v \in V(H)$, 使得 $d_v \geq 5$, 那么 H 包含 $S_5^{(3)}$, 其中 $S_5^{(3)}$ 标号如下



由对称性, 我们只对一条边标号. 我们可以验证 $5\beta \approx 1.1803 > 1$, 由此, 由引理2.2.3和引理2.2.13, 我们得到 $\rho(H) > \rho'_3$. 因此, 我们得到超图 H 中每一个节点的度至多为4.

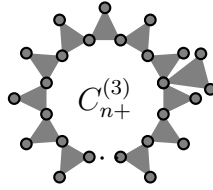
如果存在 $v \in V(H)$, 使得 $d_v = 4$, 并且 H 包含 $S_{4+}^{(3)}$, 其中 $S_{4+}^{(3)}$ 标号如下



这里 $x_1 = \beta$, $x_2 = 1 - \beta$, $x_3 = \frac{\beta}{1-\beta}$, $x_4 = x_5 = x_6 = \beta$, 我们可以验证 $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \approx 1.0172 > 1$, 因此, 由引理2.2.3 和引理2.2.13, 我们得到 $\rho(H) >$

$\rho(S_{4+}^{(3)}) > \rho'_3$ 。综上, 由于 $\rho(S_4^{(3)}) = \rho_3$ 和 $\rho(S_{4+}^{(3)}) > \rho'_3$, 因此如果 H 是不可约的, 我们得到超图 H 中每一个节点的度至多为3。

情形2. 超图 H 包含一个圈 $C_n^{(3)}$ 。由于 $\rho(C_n^{(3)}) = 2\sqrt[3]{4}$ ([64]), 我们可以假定 H 至少包含一条边 F , F 不在圈 $C_n^{(3)}$ 上, 而是连接在 $C_n^{(3)}$ 上。首先, 我们证明 F 是通过分支边而不是分支节点连接在圈 $C_n^{(3)}$ 上。否则, H 包含子同态型 $C_{n+}^{(3)}$ 如下:



很显然, 这个超图是可约的, 且可由下面的一般图 $C_{n+}^{(2)}$ 扩展得到。

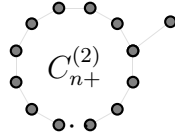
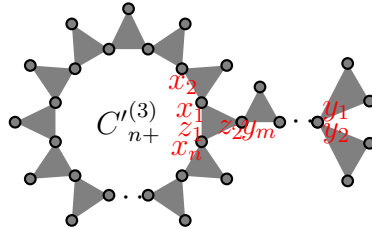


图 $C_{n+}^{(2)}$ 不在Brouwer 和Neumaier所得结论的列表中(see Page 1), 所以, $\rho(C_{n+}^{(2)}) > \sqrt{2 + \sqrt{5}}$. 由推论4.1.6, 我们得到 $\rho(C_{n+}^{(3)}) > 2\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$. 矛盾!

因此, F 必须通过分支边连接到该超图上的圈上。通过考虑边 F , 我们有下面的分类:

1. 如果起始于边 F 的路径到达一个分支节点, 那么 H 包含下面的子同构型 $C'_{n+}^{(3)}$. 我们对 $C'_{n+}^{(3)}$ 标号如下:



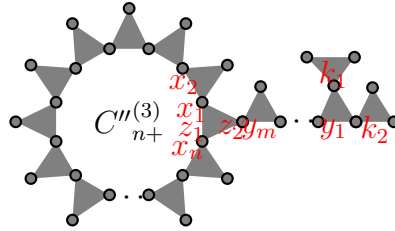
由引理4.3.6, 存在 $x_1 \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$ 满足 $f_\beta^n(x_1) = 1 - x_1$, 所以 $x_n = f_\beta^n(x_1) = 1 - x_1$ (对称性保证了标号是一致的), $z_1 = 1 - x_n = x_1$. 令 $y_1 = y_2 = \beta$, $y_i = f_\beta^{i-2}(2\beta)$ ($3 \leq i \leq m$). 由于 $\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} < 2\beta < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$,

由引理2.2.14, 我们得到 y_i 关于 i 递减且趋于 $\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 因此, $y_m > \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$, $z_2 = 1 - y_m < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 所以, 我们有

$$x_1 \cdot z_1 \cdot z_2 < \left(\frac{1 + \sqrt{1-4\beta}}{2}\right)^3 = \beta.$$

因此, $C'_{n+}^{(3)}$ 是一致 β -超正规的. 我们得到 $\rho(H) \geq \rho(C'_{n+}^{(3)}) > \rho'_3$. 矛盾!

2. 如果起始于边 F 的路径到达一个分支边, 那么 H 包含下面的子同构型 $C'''_{n+}^{(3)}$, 我们对 $C'''_{n+}^{(3)}$ 标号如下:

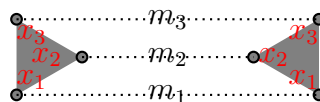


类似于上一种情况, 由引理4.3.6, 存在 $x_1 \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$ 满足 $f_\beta^n(x_1) = 1 - x_1$. 所以, $x_n = f_\beta^n(x_1) = 1 - x_1$, $z_1 = 1 - x_n = x_1$. 令 $k_1 = k_2 = \beta$, $y_1 = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$, 且 $y_i = f_\beta^{i-1}(y_1)$ ($2 \leq i \leq m$). 由于 $\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} < \frac{\beta}{(1-\beta)^2} < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 由引理2.2.14, 我们得到 y_i 关于 i 递减且趋于 $\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 因此, $y_m > \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$, $z_2 = 1 - y_m < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 所以, 我们有

$$x_1 \cdot z_1 \cdot z_2 < \left(\frac{1 + \sqrt{1-4\beta}}{2}\right)^3 = \beta.$$

因此, $C'''_{n+}^{(3)}$ 是一致 β -超正规的. 我们得到 $\rho(H) \geq \rho(C'''_{n+}^{(3)}) > \rho'_3$. 矛盾!

3. 如果起始于边 F 的路径到达一个圈, 那么 H 包含下面的子图 $\Theta(m_1, m_2, m_3)$. 这个子图是由把三对分支节点用三条长度分别为 m_1 , m_2 , 和 m_3 的路径连接起来得到的. 我们对 $\Theta(m_1, m_2, m_3)$ 标号如下:



$$\Theta(m_1, m_2, m_3)$$

由引理4.3.6, 对于 $i = 1, 2, 3$, 存在 $x_i \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$ 满足 $f_\beta^{m_i}(x_i) = 1 - x_i$. 我们在 $\Theta(m_1, m_2, m_3)$ 上分别标出 x_1, x_2 , 和 x_3 并且很自然地可以在每条路径 P_{m_i} 上给出标号. 由 x_i 的定义, 我们易知这些标号是对称的, 并由此保证这种标号具有一致性. 由

$$x_1 x_2 x_3 < \left(\frac{1 + \sqrt{1-4\beta}}{2} \right)^3 = \beta$$

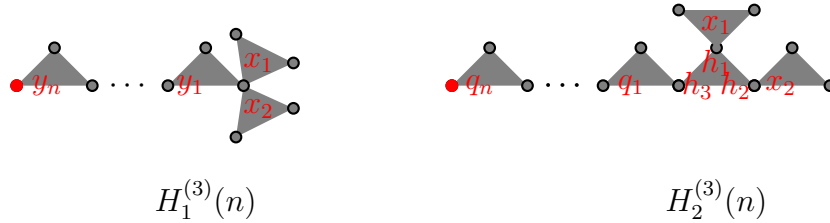
得知, 该图是一致 β -超正规的, 所以

$$\rho(H) \geq \rho(\Theta(m_1, m_2, m_3)) > \rho'_3.$$

矛盾!

4. 剩余的情况是: H 包含一个圈 C , 且仅有一些路径连接在 C 上, 因此, H 是一个如定理中描述的闭基普.

情形3. 我们假定 H 是一个超树, 并且令 $H_1^{(3)}$ 表示带有分支节点的子超图, 令 $H_2^{(3)}$ 表示带有分支边的子超图.



在图 $H_1^{(3)}(n)$ 中, 令 $x_1 = x_2 = \beta$, $y_1 = \frac{\beta}{1-2\beta} = f_\beta(2\beta)$, $y_n = f_\beta^n(2\beta)$. 由于 $2\beta \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$, 由引理2.2.14, 我们得到 $y_n = f_\beta^n > \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$.

在图 $H_2^{(3)}(n)$ 中, 令 $x_1 = x_2 = \beta$, $h_1 = h_2 = 1 - \beta$, $h_3 = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$. 我们可以验证 $h_3 \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$. 由于 $q_n = f_\beta^n(h_3)$, 由引理2.2.14, 我们得到 $q_n > \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$.

我们可以排除下面这些结构, 得到 H 是一个如定理中描述的开基普. 首先, 假设在 H 的中间存在一个分支节点, 并且 H 包含下面的子图

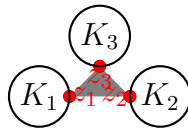


这里 G_1 和 G_2 来自于 $H_1^{(3)}(n)$ 或 $H_2^{(3)}(n)$ ($n \geq 0$), 并且通过图中红色节点被粘合在一块。我们可以得到

$$z_1 + z_2 + \beta > \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{2} + \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{2} + \beta = 1.$$

由此可知这个子超图是超正规的, 所以 $\rho(H) > \rho'_3$. 矛盾!

如果 H 包含一个分支边, 连接这条边三个节点的都不是路径, H 包含下面的子图



这里 K_1 , K_2 和 K_3 来自于 $H_1^{(3)}(n)$ 或 $H_2^{(3)}(n)$ ($n \geq 0$), 并且通过图中红色节点被粘合在一块。类似于上一种情况, 对于 $i = 1, 2, 3$, 由引理2.2.14, 我们得到 $z_i < \frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2}$. 所以,

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 < \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2}\right)^3 = \beta.$$

由此可知这个子超图是超正规的, 所以 $\rho(H) > \rho'_3$. 矛盾!

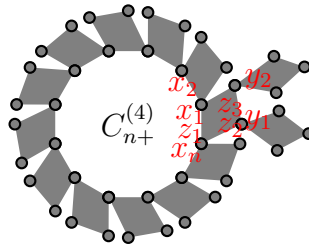
综上, H 必须是一个如定理中描述的开基普。□

4.3.4 定理4.3.2的证明

证明: 令 H 为谱半径 $\rho(H) \leq \rho'_4 = 6\sqrt[4]{2 + \sqrt{5}}$ 的不可约的4-一致超图。如果 H 不是简单超图, 由引理4.3.8 知, 它就是 $C_2^{(4)}$ 。从现在起, 我们考虑 H 是简单超图。

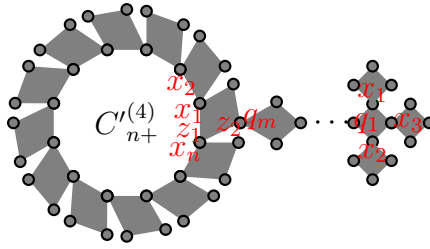
情形1. H 包含圈 C . 由于 H 是不可约的, 它一定含有一条没有叶节点的边 F 。我们考虑下面两种情况:

1. 边 F 在圈 C 上, H 包含下面的子同构型 $C_{n+}^{(4)}$,



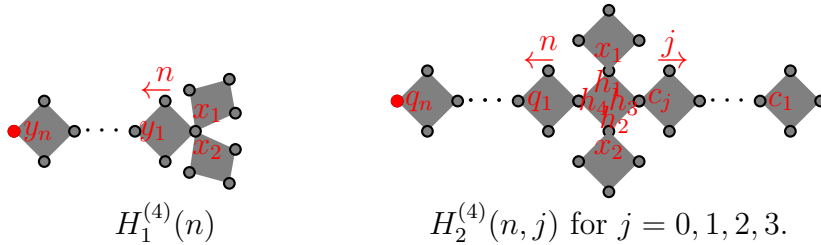
由引理4.3.6, 存在 $x_1 \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$ 满足 $f_\beta^n(x_1) = 1 - x_1$, 所以 $x_n = f_\beta^n(x_1) = 1 - x_1$ (对称性保证了标号是一致的), $z_1 = 1 - x_n = x_1$. 令 $y_1 = y_2 = \beta, z_2 = z_3 = 1 - \beta$, 我们可以验证 $x_1 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 < (\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})^2 \cdot (1 - \beta)^2 \approx 0.2229 < \beta$, 由此 $C_{n+}^{(4)}$ 是 β -超正规的. 我们得到 $\rho(H) \geq \rho(C_{n+}^{(4)}) > \rho'_r$.

2. 如果边 F 不在圈 C 上, 存在一条路径连接 F 和 C . Thus, H 包含下面的子同构型:



像前面一样, 存在 $x_1 \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$ 和 $z_1 = x_1$. 令 $x_1 = x_2 = x_3 = \beta, q_1 = \frac{\beta}{(1-\beta)^3}$, 我们可以验证 $q_1 \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$. 令 $q_m = f_\beta^{m-1}(q_1)$, 由引理2.2.14, 我们得到 q_m 关于 m 递减, 并且当 $m \rightarrow \infty$, 我们得到 $q_m > \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 因此 $z_2 = 1 - q_m < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 我们可以验证 $x_1 \cdot z_1 \cdot z_2 < (\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})^3 = \beta$, 进而得到 $C_{n+}^{(4)}$ 是 β -超正规的, 所以我们有 $\rho(H) \geq \rho(C_{n+}^{(4)}) > \rho'_r$.

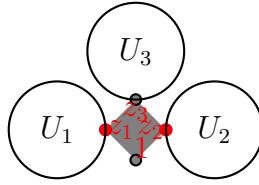
情形2. H 是一个超树, 但不是一个4-匕首型超图. 我们可以排除一些子超图结构, 得到 H 具有开基普结构. 令 $H_1^{(4)}(n)$ 表示具有分支节点子超图, 令 $H_2^{(4)}(n, j)$ ($j = 0, 1, 2, 3$) 表示具有分支边的子超图. 我们对这两个子超图标号如下:



在图 $H_1^{(4)}(n)$ 上, 令 $x_1 = x_2 = \beta, y_1 = \frac{\beta}{1-2\beta} = f_\beta(2\beta), y_n = f_\beta^n(2\beta)$. 由于 $2\beta \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$, 由引理2.2.14, 我们得到 $y_n = f_\beta^n > \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 在图 $H_2^{(4)}(n, j)$ 上, 令 $x_1 = x_2 = c_1 = \beta, h_1 = h_2 = 1 - \beta, c_j = f_\beta^{j-1}(\beta)$. 当 $j = 0$ 时, 我们得

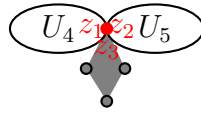
到 $h_3 = 1$, $h_4 = \frac{\beta}{h_1 h_2 h_3} = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}$. 当 $j = 1$ 时, $h_3 = 1 - \beta$, $h_4 = \frac{\beta}{h_1 h_2 h_3} = \frac{\beta}{(1-\beta)^3}$. 当 $j = 2$ 时, $h_3 = 1 - c_2 = \frac{1-2\beta}{1-\beta}$, $h_4 = \frac{\beta}{h_1 h_2 h_3} = \frac{\beta}{(1-\beta)(1-2\beta)}$. 当 $j = 3$ 时, $h_3 = 1 - c_3 = \frac{1-3\beta+\beta^2}{1-2\beta}$, $h_4 = \frac{\beta}{h_1 h_2 h_3} = \frac{\beta(1-2\beta)}{(1-3\beta+\beta^2)(1-\beta)^2}$. 我们可以验证, 对于 $j = 0, 1, 2, 3$, $h_4 \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$. 由于 $q_n = f_\beta^n(h_4)$, 由引理 2.2.14, 我们得到 $q_n > \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 我们可以排除下列这些结构, 进而得到 H 是一个开基普。

1. 首先, 我先证明所有的分支节点和分支边躺在同一条路径 P 上。否则, H 包含下面的子超图。



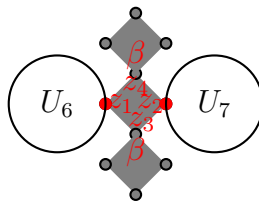
这里 U_1, U_2 和 U_3 来自于 $H_1^4(n)$ ($n \geq 0$) 或 $H_2^4(n, j)$ ($n \geq 0, j = 0, 1, 2, 3$), 并且通过图中红色节点被粘合在一块。我们易得 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot 1 < (\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})^3 \cdot 1 = \beta$. 因此, 这个子超图是 β -超正规的, $\rho(H) > \rho'_4$.

2. 任意分支节点躺在路径 P 的端点处, 否则, H 包含下面的子超图



这里 U_4 和 U_5 来自于 $H_1^4(n)$ ($n \geq 0$) 或 $H_2^4(n, j)$ ($n \geq 0$ 且 $j = 0, 1, 2, 3$), 并且通过图中红色节点被粘合在一块。易知 $z_1 + z_2 + z_3 > \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} + \frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2} + \beta = 1$. 因此, 此子超图是 β -超正规的, $\rho(H) > \rho'_4$.

3. 任意分支边也必须躺在路径 P 的端点处, 否则, H 包含下面的子超图

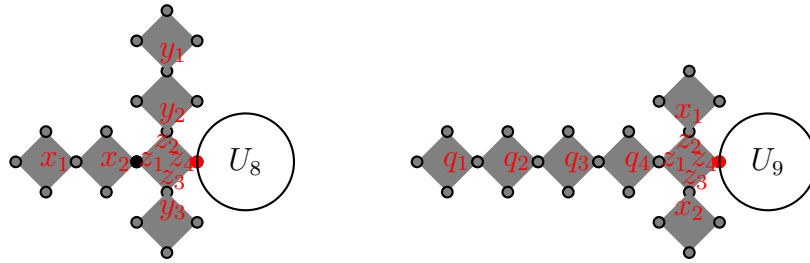


这里 U_6 和 U_7 来自于 $H_1^4(n)$ ($n \geq 0$) and $H_2^4(n, j)$ ($n \geq 0, j = 0, 1, 2, 3$), 并且通过图中红色节点被粘合在一块。易知

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 < \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2}\right)^2 \cdot (1 - \beta)^2 \approx 0.2229 < \beta.$$

此子超图是 β -超正规的, $\rho(H) > \rho'_r$. 矛盾!

4. 现在我们考虑每一个4-分支边被长度分别为1, 1, 和 k ($k = 1, 2, 3$)的路径连接, 否则, H 包含下面的任一个子超图



这里 U_8 和 U_9 来自于 $H_1^4(n)$ ($n \geq 0$) 或 $H_2^4(n, j)$ ($n \geq 0, j = 0, 1, 2, 3$), 并且通过图中红色节点被粘合在一块。

对于左边的超图, 令 $x_1 = y_1 = y_3 = \beta$, $x_2 = y_2 = \frac{\beta}{1-\beta}$, $z_3 = 1 - \beta$, $z_1 = z_2 = \frac{1-2\beta}{1-\beta}$, 有 $z_4 < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 因此,

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 < \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 - 2\beta}{1 - \beta}\right)^2 \cdot (1 - \beta) \approx 0.2254 < \beta.$$

对于右边的超图, 令 $q_1 = x_1 = x_2 = \beta$, $q_i = f_\beta^{i-1}(\beta)$ ($i = 2, 3, 4$), $z_1 = 1 - q_4 = \frac{1-4\beta+3\beta^2}{1-3\beta+\beta^2}$, $z_2 = z_3 = 1 - \beta$, 我们有 $z_4 < \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 因此

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 < \frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2} \cdot \frac{1 - 4\beta + 3\beta^2}{1 - 3\beta + \beta^2} \cdot (1 - \beta)^2 \approx 0.2314 < \beta.$$

这两个子超图都是 β -超正规的, 所欲 $\rho(H) > \rho'_r$. 矛盾!

综上, H 是一个如定理中所描述的开基普。

情形3. H 是一个4-匕首型超图 $H_{i,j,k,l}^{(4)}$ ($1 \leq i \leq j \leq k \leq l$.)

我们对 $H_{i,j,k,l}^{(4)}$ 标号使它除了在分支边外是 β -正规的. 在分支边内标号的乘积用 $g(i, j, k, l)$ 表示, 我们得到

$$g(i, j, k, l) = f_{\beta}^{i-1}(\beta) f_{\beta}^{j-1}(\beta) f_{\beta}^{k-1}(\beta) f_{\beta}^{l-1}(\beta).$$

容易验证, 如果 $g(i, j, k, l) < \beta$, 那么有 $(i, j, k, l) = (2, 2, 2, 2), (1, 2, 2, 4), (1, 2, 3, 3), (1, 1, 5, 5)$, 或 $(1, 1, 4, 6)$, 所以, H 不能包含这些4-匕首型超图. 因此, H 必须是下面超图中的一种:

$H_{1,2,2,2}^{(4)}, H_{1,2,2,3}^{(4)}, H_{1,1,4,4}^{(4)}, H_{1,1,4,5}^{(4)}, H_{1,1,k,l}^{(4)}$ ($1 \leq k \leq 3$, 且 $k \leq l$). 易知这些超图都是 β -次正规的. 这是对谱半径 $\rho(H) < \rho'_4$ 的4-匕首型超图的完全分类. $\square$

4.3.5 定理4.3.3的证明

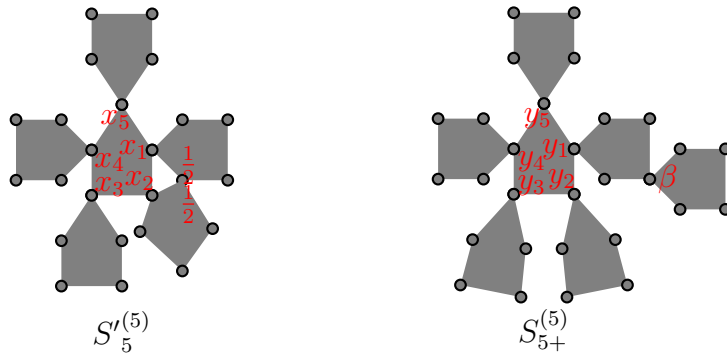
证明: 令 $S_r^{(r)}$ 表示包含 $r+1$ 条边的星状一致超图. 这 $r+1$ 条边分别是 $F_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}, F_1, \dots, F_r$, 这里 $F_i \cap F_0 = \{v_i\}$ ($1 \leq i \leq r$), $F_i \cap F_j = \emptyset$ ($1 \leq i < j \leq r$). (我们可以在定理4.3.3中查看 $S_5^{(5)}$).

首先我们证明 $\rho_r(S_r^{(r)}) > \rho'_r$ ($r \geq 6$). 令 $B(v_i, F_i) = \beta$, $B(v_i, F_0) = 1 - \beta$, $1 \leq i \leq r$. 对于 $r \geq 6$, 在边 F_0 内的标号乘积为

$$(1 - \beta)^r < \beta.$$

因此, $S_r^{(r)}$ 是 β -超正规的. 如果 H 是不可约的且包含 $S_r^{(r)}$ ($r \geq 6$), 由引理4.3.5, 我们得到 $\rho(H) \geq \rho(S_r^{(r)}) > \rho'_r$. 矛盾!

用同样的方法我们可以证明 $S_5^{(5)}$ 是 β -次正规的. 另外, 如果 H 是谱半径 $\rho(H) \leq \rho'_5$ 的一致超图, 但不是 $S_5^{(5)}$, 那么 H 包含下面的子同构型 $S_5^{\prime(5)}$ 或 $S_{5+}^{(5)}$, 标号如下



对于 $S_5^{(5)}$, 令 $x_1 = x_2 = 1 - 2\beta$, $x_3 = x_4 = x_5 = 1 - \beta$. 我们可以验证

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = (1 - 2\beta)^2 (1 - \beta)^3 \approx 0.1242 < \beta.$$

对于 $S_{5+}^{(5)}$, 令 $y_1 = 1 - f_\beta(\beta) = \frac{1-2\beta}{1-\beta}$, $y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = 1 - \beta$. 我们可以验证

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 = (1 - 2\beta)(1 - \beta)^4 \approx 0.1798 < \beta.$$

因此, $S_5^{(5)}$ 和 $S_{5+}^{(5)}$ 都是一致 β -超正规的, 所以 $\rho(H) > \rho'_5$. 矛盾!

综上, H 是5星状一致超图. $\square$

4.3.6 构造谱半径 $\rho(H) \leq (r-1)! \sqrt[r]{2+\sqrt{5}}$ 的开基普和闭基普

在这一节, 我们对谱半径至多为 $(r-1)! \sqrt[r]{2+\sqrt{5}}$ 的 r -一致超图 H 的结构进行刻画. 它们可以由定理4.3.1-4.3.3中的超图以及Cvetković et al [27] 和Brouwer-Neumaier [22]所给出的一般图扩展得到. 这是一个不完全分类, 只是对超图结构的描述. 这一结果与Woo 和Neumaier 所刻划的谱半径至多为 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ([63])的一般图的结果类似. 但是我们的方法与Woo 和Neumaier所用的线性代数的方法完全不同, 而且对于一般图, 用我们的方法可以大大简化Woo 和Neumaier的证明, 而得到与Woo 和Neumaier相同的结果. 对于一般图, 由于证明较易, 我们这里不再给出证明.

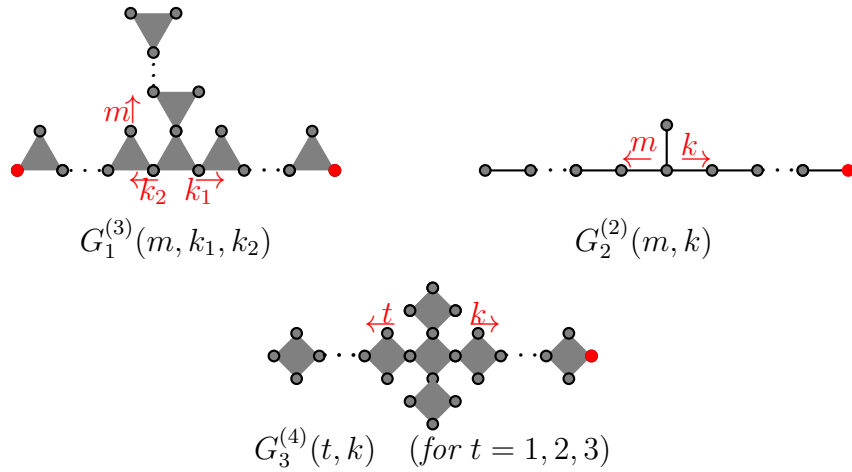
现在, 我们构造一些谱半径至多为 $\rho(H) \leq (r-1)! \sqrt[r]{2+\sqrt{5}}$ 的超图, 这也可以看作是对定理4.3.1-4.3.3的结论的佐证.

我们已经对4-星状一致超图作了完全分类, 因此不需要再去构造这类图形. 我们首先只需构造一些3-闭基普, 3-开基普和4-开基普. 我们先给出一些部分超图, 这些部分超图可以粘合在一块形成一个谱半径 $\rho(H) \leq (r-1)! \sqrt[r]{2+\sqrt{5}}$ 的超图. 这里, 一个部分超图是一个包含一个或两个指定节点的一致超图. 我们称一个部分超图是 α -次正规的, 如果存在一个加权关联矩阵 B 满足

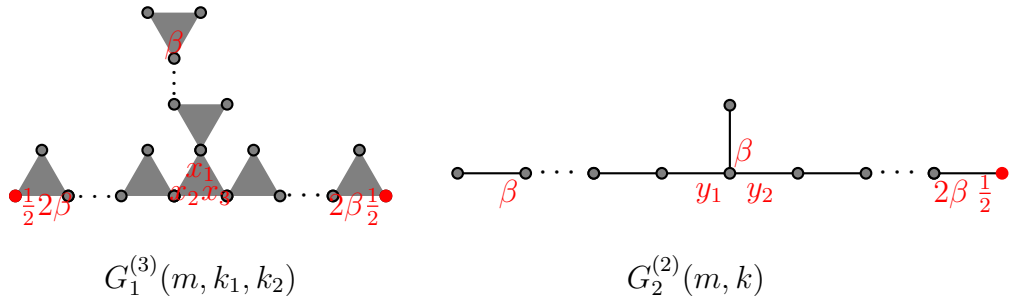
1. $\prod_{v \in e} B(v, e) \geq \alpha, \forall e \in E(H),$
2. $\sum_{e: v \in e} B(v, e) \leq \frac{1}{2},$ 对于指定节点 $v,$
3. $\sum_{e: v \in e} B(v, e) \leq 1,$ 对于非指定节点.

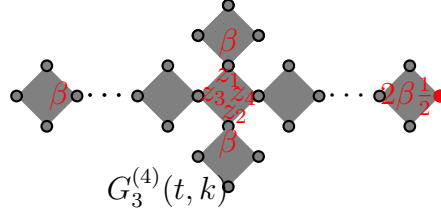
引理4.3.9 对于如下部分超图 $G_1^{(3)}(m, k_1, k_2)$, $G_2^{(2)}(m, k)$, 和 $G_3^{(4)}(t, k)$ (红色的为指定节点), 我们有下列结论:

1. 对任意的 $m \geq 1$, 存在 k_0 使得对任意 $k_1, k_2 \geq k_0$, $G_1^{(3)}(m, k_1, k_2)$ 是 $(\sqrt{5}-2)$ -次正规的.
2. 对任意的 $m \geq 1$, 存在 k_0 使得对任意 $k \geq k_0$, $G_2^{(2)}(m, k)$ 是 $(\sqrt{5}-2)$ -次正规的.
3. 对任意的 $t = 1, 2, 3$, 存在 k_t 使得对任意 $k \geq k_t$, $G_3^{(4)}(t, k)$ 是 $(\sqrt{5}-2)$ -次正规的.



证明: 我们在指定节点的角落令标号为 $\frac{1}{2}$, 其它叶节点的角落标号1 除了分支节点和分支边外, 我们使标号满足定义2.2.5中的两条。我们对这3个部分超图标号如下:





对于部分超图 $G_1^{(3)}$, 由 f_β , 我们得到 $x_1 = 1 - f_\beta^{m-1}(\beta)$, $x_2 = 1 - f_\beta^{k_1-1}(2\beta)$, $x_3 = 1 - f_\beta^{k_2-1}(2\beta)$. 我们用 $g(m, k_1, k_2)$ 表示在中部分支边内的标号乘积, 易知

$$g(m, k_1, k_2) = x_1 x_2 x_3 = (1 - f_\beta^{m-1}(\beta))(1 - f_\beta^{k_1-1}(2\beta))(1 - f_\beta^{k_2-1}(2\beta)).$$

由引理2.2.14, 因为 $2\beta \in (\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2})$, 可得 $1 - f_\beta^{m-1}(\beta) > \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$, 且 $\lim_{k_1 \rightarrow \infty} (1 - f_\beta^{k_1-1}(2\beta)) = \lim_{k_2 \rightarrow \infty} (1 - f_\beta^{k_2-1}(2\beta)) = \frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2}$. 因此,

$$\lim_{k_1, k_2 \rightarrow \infty} g(m, k_1, k_2) > \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2} \right)^3 = \beta,$$

存在 k_0 使得对 $k_1, k_2 \geq k_0$, 有 $g(m, k_1, k_2) > \beta$, 亦即, $G_1^{(3)}$ 是 β -次正规的.

同样地, 对于 $G_2^{(2)}$, 我们得 $y_1 = f_\beta^{m-1}(\beta)$, $y_2 = f_\beta^{k-1}(2\beta)$. 在分支节点处的标号之和为

$$\beta + y_1 + y_2 = \beta + f_\beta^{m-1}(\beta) + f_\beta^{k-1}(2\beta).$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\beta + f_\beta^{m-1}(\beta) + f_\beta^{k-1}(2\beta)) < \beta + \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{2} + \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{2} = 1.$$

因此, 存在 $k_0 = k_0(m)$ 使得对任意 $k \geq k_0$, 我们有 $y_1 + y_2 + \beta < 1$, 所以 $G_2^{(2)}$ 是 β -次正规的.

对于 $G_3^{(4)}(t, k)$, 我们有 $z_1 = z_2 = 1 - \beta$, $z_3 = 1 - f_\beta^{t-1}(\beta)$, $z_4 = 1 - f_\beta^{k-1}(2\beta)$. 在分支边内的标号乘积为

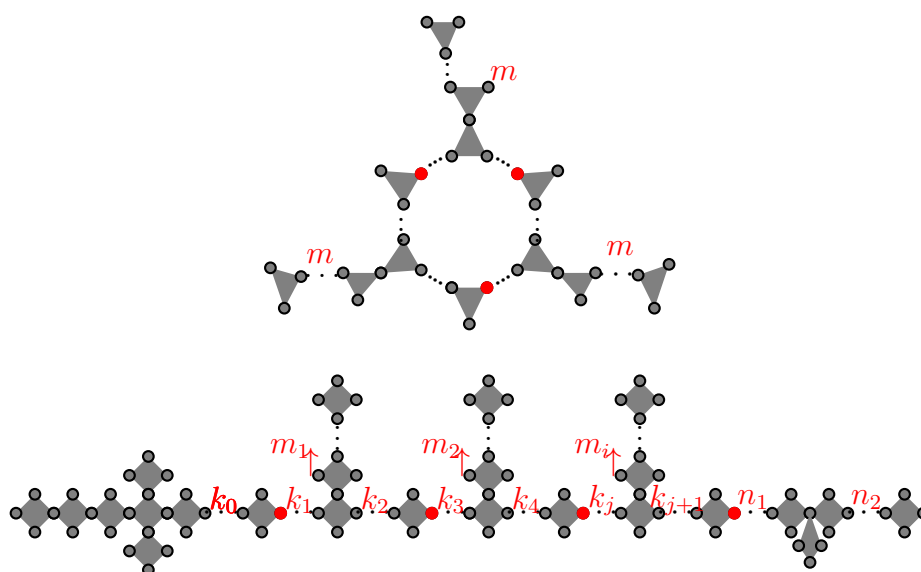
$$z_1 z_2 z_3 z_4 = (1 - \beta)^2 (1 - f_\beta^{t-1}(\beta)) (1 - f_\beta^{k-1}(2\beta)).$$

对任意 $t = 1, 2, 3$, 我们可以验证

$$(1 - \beta)^2 (1 - f_\beta^{t-1}(\beta)) \frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2} < \beta.$$

故存在 k_t 使得对任意 $k \geq k_t$, $G_3^{(4)}$ 是 β -次正规的. $\square$

对每条边增加一个节点, 指定节点不变, 由此我们易知, 对部分超图, 扩展理论仍然是成立的。如果一个部分超图 G 是 α -次正规的, 对 G 进行扩展后所得的图形仍然是 α -次正规的。对任意 $r \geq 4$, 我们可以将 $G_1^{(3)}(m, k_1, k_2)$ 扩展为 $G_1^{(r)}(m, k_1, k_2)$, 将 $G_2^{(2)}(m, k)$ 扩展为 $G_2^{(r)}(m, k)$, 将 $G_3^{(4)}(t, k)$ 扩展为 $G_3^{(r)}(t, k)$ 。将 $G_1^{(r)}$, $G_2^{(r)}$ 和 $G_3^{(r)}$ 通过指定节点粘合到一块, 得到一个新图 H , H 仍然是 $(\sqrt{5} - 2)$ -次正规的。通过这种方法, 我们可以得到很多谱半径 $\rho(H) < \rho'_r$ 的超图, 例如



参考文献

- [1] D. Bakry and M. Emery. Diffusions hypercontractives. Sem. de Prob.XIX, Lecture Notes in Math, 1123 (1985) 177-206.
- [2] F. Bauer, P. Horn, Y. Lin, G. Lippner, D. Mangoubi, S. T. Yau, Li-Yau inequality on graphs. Arxiv: 1306.2561v2.
- [3] L. Chen and W.Y. Chen, Gradient estimates for a nonlinear parabolic equation on complete non-compact Riemannian manifolds. Ann. Glob. Anal. Geom., 35(2009)397-404.
- [4] Fan Chung, Yong Lin, S.-T. Yau, Harnack inequalities for graphs with non-negative Ricci curvature, J. Math. Anal. Appl. 415(2014) 25-32.
- [5] Fan R.K. Chung, S.T. Yau, Logarithmic Harnack inequalities, Math. Res. Lett. 3 (1996) 793-812.
- [6] F. Chung, S. T. Yau. A Harnack inequality for Dirichlet eigenvalues. J. of Graph Theory, 34 (2000) 247-257.
- [7] F. Chung. Spectral Graph Theory. CMBS Lecture Notes, AMS Publication, 1996.
- [8] F. Chung and S. T. Yau. A Harnack inequality for homogeneous graphs and subgraphs. Communication in Analysis and Geometriy,2 (1994) 628-639.
- [9] Y. Lin and S. T. Yau. Ricci Curvature and eigenvalue estimation on locally finite graphs. Mathematics Research Letters, 17(2010) 343-356.
- [10] P. Li, S. T. Yau, On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. Acta. Math., 156(1986)153-201.
- [11] Y. Ollivier. Ricci curvature of Markov chains on metric spaces. J. Funct. Anal., 256 (2009) 810-864.

- [12] G.Y. Huang, B.Q. Ma,: Gradient estimates for a nonlinear parabolic equation on Riemannian manifolds. Arch. Math(Basel), 94(2010)265-275.
- [13] X.D. Li,: Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds. J. Math. Pures Appl., 84(2005)1295-1361.
- [14] L. Ma,: Gradient estimates for a simple elliptic equation on complete non-compact Riemannian manifolds. J. Funct. Anal., 241 (2006)374-382.
- [15] Y.Y. Yang,: Gradient estimates for a nonlinear parabolic equation on Riemannian manifolds. Proc. Amer. Math. Soc., 136(2008)4095-4102.
- [16] D. Bakry, Z. M. Qian,: Harnack inequalities on Manifold with positive or nonnegative Ricci curvature. Revista. Math. Iber., 15(1999)143-179.
- [17] J. F. Li, X. J. Xu,: Differential Harnack inequalities on Riemannian manifolds I: linear heat equation. Adv. Math., 226(2011)4456-4491.
- [18] Bin Qian,: Remarks on Li-Yau inequality on graphs. arXiv:1311.3367.
- [19] Guangyue Huang, Zhijie Huang, Haizhong Li,: Gradient estimates for the porous medium equations on Riemannian manifolds. Journal of Geometric Analysis, 23, 1851-1875(2013).
- [20] Y. Lin, S.T. Yau,: Ricci curvature and eigenvalue estimate on locally finite graphs. Math. Res. Lett., 17, 343-356(2010).
- [21] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [22] A. E. Brouwer and A. Neumaier, The graphs with spectral radius between 2 and $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$, *Linear Algebra Appl.* **115** (1989) 273-276.
- [23] K.C. Chang, K. Pearson, and T. Zhang, Perron-Frobenius theorem for non-negative tensors, Commun. Math. Sci. 6 (2008) 507-520.
- [24] F. Chung, The Laplacian of a hypergraph, In J. Friedman (Ed.), *Expanding graphs (DIMACS series)*, **1993**, 21-36.

-
- [25] S. M. Cioabă, E. R. van Dam, J. H. Koolen, and J. Lee, Asymptotic results on the spectral radius and the diameter of graphs, *Linear Algebra Appl.* **432** (2010) 722-737.
- [26] Joshua Cooper and Aaron Dutle, Spectra of Uniform Hypergraphs, *Linear Algebra and its Application*, **436** (2012) 3268-3292.
- [27] D. M. Cvetković, M. Doob, and I. Gutman, On graphs whose spectral radius does not exceed $(2 + \sqrt{5})^{1/2}$, *Ars Combin.* **14** (1982) 225-239.
- [28] E. R. van Dam and R. E. Kooij, The minimal spectral radius of graphs with a given diameter, *Linear Algebra Appl.* **423** (2007) 408-419.
- [29] D. M. Cvetković, M. Doob and H. Sachs, *Spectra of Graphs, Theory and Application*, 15th ed, NewYork: Academic Press, 1980.
- [30] D. M. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić, Eigenspaces of Graphs, *Cambridge University Press*, 1997.
- [31] A. Hoffman, On limit points of spectral radii of non-negative symmetrical integral matrices, pp. 165 - 172 in: *Lecture Notes in Math.* **303**, Springer, Berlin 1972.
- [32] A. J. Hoffman and J. H. Smith, On the spectral radii of topologically equivalent graphs, in: Fiedler (Ed.), *Recent Advances in Graph Theory*, Academia Praha, New York. (1975) 273-281.
- [33] Q. Li and K. Feng, *On the largest eigenvalue of graph*, Acta Math. Appl. Sinica 2 (1979) 167-175 (in Chinese).
- [34] Bao-Feng Wu, Xi-Ying Yuan and En-Li Xiao *On the spectral radii of trees*, Journal of East China Normal University(Natural Science)(2004) NO.3,22-28 (in Chinese).
- [35] F. Belardo, E. M. Li Marzi and S.K. Simic, *Some notes on graphs whose index is close to 2*, Linear Algebra Appl. 423 (2007) 81-89.

- [36] D. M. Cvetković, *Some possible directions in further investigations of graph spectra*, Algebraic Methods in Graph Theory, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1981, pp. 47-67.
- [37] D. Cvetković and P. Rowlinson, *The largest eigenvalue of a graph: a survey*, Linear and Multilinear Algebra 28 (1990) 3-33.
- [38] E. R. van Dam, *Graphs with given diameter maximizing the spectral radius*, Linear Algebra Appl. 426 (1) (2007) 454-457.
- [39] L. Feng, *Spectral radius of graphs with given diameter*, Ars Combin., in press.
- [40] J. Guo and J. Shao, *On the spectral radius of trees with fixed diameter*, Linear Algebra Appl. 413 (1) (2006) 131-147.
- [41] S. Guo, *On the spectral radius of bicyclic graphs with n vertices and diameter d* , Linear Algebra Appl. 422 (1) (2007) 119-132.
- [42] S. Guo, *On the spectral radius of unicyclic graphs with n vertices and diameter d* , submitted for publication.
- [43] S. Guo, G. Xu and Y. Chen, *On the spectral radius of trees with n vertices and diameter d* , Adv. Math. (China) 34 (6) (2005) 683-692 (in Chinese).
- [44] H. Liu, M. Lu and F. Tian, *On the spectral radius of unicyclic graphs with fixed diameter*, Linear Algebra Appl. 420 (2007) 449-457.
- [45] B. N. Parlett, *The Symmetric Eigenvalue Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [46] A. J. Schwenk, Computing the characteristic polynomial of a graph, in: *Graphs and Combinatorics*, Lect. Notes in Math., vol. **406** (1974) 153-172.
- [47] P. Keevash, J. Lenz, D. Mubayi, Spectral extremal problems for hypergraphs, preprint, arXiv:1304.0050 [math.CO].
- [48] Jingfen Lan, Linyuan Lu, Diameter of Graphs with Spectral Radius at most $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, Linear Algebra and its Application, **438**, (2013) 4382-4407.

- [49] J. Lan, L. Lu, and L. Shi, Graphs with Diameter $n - e$ Minimizing the Spectral Radius, *Linear Algebra Appl.*, **437**, No. 11, (2012), 2823-2850.
- [50] L.H. Lim, Singular values and eigenvalues of hypermatrices: a variational approach, in *Proceedings of the IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing*
- [51] L. Lu and X. Peng, High-Ordered Random Walks and Generalized Laplacians on Hypergraphs, the extended abstract is published in A. Frieze, P. Horn, P. Pralat (Eds.): *Algorithms and Models for the Web Graph - 8th International Workshop, (WAW 2011) Proceedings*. The full paper is published in *Internet Mathematics*, **9**, No. 1, (2013) 3-32.
- [52] Linyuan Lu and Xing Peng, Loose Laplacian spectra of random hypergraphs, *Random Structures & Algorithms*, **41** No. 4, (2012), 521-545.
- [53] Linyuan Lu and Xing Peng, Monochromatic 4-term arithmetic progressions in 2-colorings of $\mathbb{Z}_n$, *J. Combin. Theory Ser. A*, **119** No. 5, (2012), 1048-1065.
- [54] Vladimir Nikiforov, Analytic methods for uniform hypergraphs, preprint, arXiv:1308.1654 [math.CO].
- [55] L. Qi, Eigenvalues of a real supersymmetric hypermatrix, *J. Symbolic Comput.* **40** (2005) 1302-1324.
- [56] L. Qi, Rank and eigenvalues of a supersymmetric hypermatrix, a multivariate homogeneous polynomial and an algebraic surface defined by them, *J. Symbolic Comput.* **41** (2006) 1309-1327.
- [57] J. A. Rodríguez, On the Laplacian Spectrum and Walk-regular Hypergraphs, *Linear and Multilinear Algebra*, **51** (3) (2003), 285-297.
- [58] J. A. Rodríguez, Laplacian eigenvalues and partition problems in hypergraphs, *Applied Mathematics Letters*, **22** (2009), 916-921.
- [59] J. B. Shearer, On the Distribution of the Maximum Eigenvalue of Graphs, *Linear Algebra Appl.* **114-115** (1989) 17-20.

-
- [60] J. H. Smith, Some properties of the spectrum of a graph, *Combinatorial Structures and their Applications*, (1970) 403-406, Gordon and Breach, New York.
- [61] X. Yuan, J. Shao and Y. Liu, The minimal spectral radius of graphs of order n with diameter $n - 4$, *Linear Algebra Appl.* **428** (2008) 2840-2851.
- [62] J. Wang, Q. Huang, X. An, and F. Belardo, Some notes on graphs whose spectral radius is close to $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, *Linear Algebra Appl.* **429** (2008) 1606-1618.
- [63] R. Woo and A. Neumaier, On graphs whose spectral radius is bounded by $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, *Graphs Combin.* **23** (2007) 713-726.
- [64] Linyuan Lu and Shoudong Man, Connected Hypergraphs with Small Spectral Radius,
arxiv.org/abs/1402.5402v3.
- [65] O. Perron, Zur Theorie der Matrices, *Mathematische Annalen* **64**(2): (1907) 248-263.

致 谢

时光荏苒，光阴如梭，三年的博士生活一转眼就快要结束了。能够进入中国人民大学数学系学习是我的荣幸，更有幸的是让我可以师从林勇教授。本论文就是在林勇教授的亲切关怀和悉心指导下完成的，在此我要向他表示由衷的感谢！林老师严谨的科学态度和治学精神，精益求精的工作作风一直深深地感染和激励着我，让我终身受益。林老师渊博的知识和活跃的思维给我巨大的启迪。师从林老师之后，使我深切地感受到知识的积累比以前更宽、更成熟了，也让我对图谱理论及其应用的研究产生了浓厚的兴趣，为我以后的工作和学习打下了坚实的基础。同时，林老师在待人上的谦逊朴实，平易近人的态度也给我留下了深刻的印象。在生活上，他也对学生非常的关心和照顾。在此，我要向我的导师表示最衷心的感谢！

在博士二年级，受国家“建设高水平大学公派研究生项目”支助，我前往美国南卡罗来纳大学数学交叉学科研究所跟随图与网络知名学者——Lincoln Lu教授，进行了为期一年的学习和科研合作。在美国留学期间，陆老师不但在科研上对我细心指导，而且在生活上给予了我很大的关怀和帮助。凡是到了中国的传统节日，陆老师都邀请在数学系的中国学生到他家做客，让我们身在异乡却能同样的感受到家庭的温暖。在此，我要对陆老师表示由衷的感谢，祝愿他身体健康，工作顺利！

真诚的感谢信息学院的龙永红老师，张庆彩老师，欧耀彬老师，张国富老师，杜忠朝老师，潘旭燕老师等在我求学期间给予我的帮助和关心。同时也要感谢我同门的兄弟姐妹们。

在此，我还要感谢我的父母、姐姐、哥哥。感谢他们对我永远的关心和义无反顾的支持，让我专心的完成学业。感谢所有曾给予我关心和帮助的人，祝你们及家人永远幸福！

最后，由衷的感谢在百忙之中抽出时间审阅本论文的专家教授！

满守东

2015年2月8日